GRAHAM PRIEST

UNA BREVÍSIMA INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA



OCEANO

EDITOR: Rogelio Carvajal Dávila

UNA BREVÍSIMA INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA

Título original: LOGIC. A VERY SHORT INTRODUCTION

Tradujo, adaptó, ajustó y corrigió el departamento editorial de Oceano
de la edición original en inglés de Oxford University Press

Publicado originalmente en inglés en 2000
Publicado según acuerdo con Oxford University Press

Eugenio Sue 59, Colonia Chapultepec Polanco
Miguel Hidalgo, Código Postal 11560, México, D.F.
☏ 5279 9000 ✆ 5279 9006
✉ info@oceano.com.mx

PRIMERA EDICIÓN

ISBN 970-777-026-0

IMPRESO EN MÉXICO / PRINTED IN MEXICO

Este libro está dedicado a todos los que alguna vez han pensado en la lógica, o lo harán alguna vez.

ÍNDICE

PREFACIO

La lógica es una de las disciplinas intelectuales más antiguas y una de las más modernas. Sus principios se remontan hasta el siglo IV a.C. Las únicas disciplinas más antiguas son la filosofía y las matemáticas, con las que siempre ha estado íntimamente relacionada. Se revolucionó cerca de la transición al siglo XX, con el uso de nuevas técnicas matemáticas, y en la última mitad de dicho siglo encontró papeles radicalmente nuevos e importantes en la computación y el procesamiento de datos. Es, por lo tanto, una materia central para la mayor parte del pensamiento y esfuerzo humanos.

Este libro es una introducción a la lógica como la comprenden los lógicos contemporáneos. Sin embargo, no tiene la intención de ser un libro de texto. Hay muchos de ellos disponibles hoy en día. El propósito de éste es explorar las raíces de la lógica, que se sumergen profundamente en la filosofía. En el camino explicaremos algo de lógica formal.

En cada uno de los capítulos principales comienzo tomando algún problema filosófico o enigma lógico particular. Entonces explico alguna aproximación a él. Con frecuencia éste es muy común; pero en algunas de las áreas no hay una respuesta estándar: los lógicos aún discrepan. En tales casos, sólo he elegido una que resul-

te interesante. Casi todas las aproximaciones, ya sean comunes o no, pueden cuestionarse. Termino cada capítulo con algunos problemas que plantea la aproximación que he explicado. En ocasiones éstos son comunes; en otras no. A veces tendrán respuestas sencillas; otras, quizá no. El propósito es plantear el desafío de lo que debe hacerse con el tema.

La lógica moderna es una materia muy matemática. He tratado de escribir el texto de tal manera que evite casi todas las matemáticas. Lo máximo que necesitamos es un poco de álgebra de secundaria para los últimos capítulos. Es necesaria también la determinación para dominar algo del simbolismo que probablemente resulte nuevo para el lector; pero esto es mucho menos de lo que se requiere para tener una comprensión básica de cualquier nuevo lenguaje. Y la claridad que da el simbolismo a preguntas complejas hace que cualquier dificultad para aprenderlo haya valido la pena. Una advertencia, sin embargo: leer un libro sobre lógica o filosofía no es como leer una novela. Por momentos hay que leer despacio y cuidadosamente. Algunas veces hay que detenerse y pensar sobre las cosas; y hay que estar preparado para regresar y releer un párrafo si es necesario.

El capítulo final del libro trata del desarrollo de la lógica. He intentado situar algunas de las cuestiones que trata el libro dentro de una perspectiva histórica, para mostrar que la lógica es una materia viva, que siempre ha evolucionado y que continuará haciéndolo. El capítulo también contiene sugerencias para futuras lecturas.

Hay dos apéndices. El primero contiene un glosario de términos y símbolos. Puede consultarse si se olvidó el significado de alguna palabra o símbolo. El segun-

do contiene una pregunta relevante para cada capítulo, con la que puede ponerse a prueba la comprensión de sus principales ideas.

El libro busca más el aliento que la profundidad. Sería fácil escribir un libro sobre el tema de cada capítulo y, ciertamente, se han escrito muchos de ese tipo. Y aún así, hay muchas cuestiones importantes sobre la lógica que ni siquiera he tocado aquí. Pero si el libro se lee hasta el final, puede obtenerse una buena idea sobre los fundamentos de la lógica moderna, y de por qué las personas consideran que vale la pena pensar en ese campo de estudio.

1. VALIDEZ: ¿QUÉ SE SIGUE DE QUÉ?

A la mayoría de las personas les gusta pensar que razonan de una forma lógica. Decirle a alguien "No estás siendo lógico" es, por lo común, una forma de crítica. Ser ilógico es estar confundido, embrollado, ser irracional. Pero ¿qué es la lógica? En *A través del espejo*, el libro de Lewis Carroll, Alicia se encuentra con el par de lógica cambiante Tweedledum y Tweedledee. Cuando Alicia se queda sin palabras, ellos atacan:

> –Sé lo que estás pensando —dijo Tweedledum: pero no es así, de ninguna manera.
>
> –Al contrario —continuó Tweedledee— si fue así, podría ser; y si fuera así, será: pero como no es, no será. Eso es lógico.

Lo que está haciendo Tweedledee —al menos en la parodia de Carroll— es razonar. Y, como él lo dice, de eso trata la lógica.

Todos razonamos. Tratamos de razonar sobre las bases de lo que ya sabemos. Tratamos de persuadir a otros de que algo es así dándoles razones. La lógica es el estudio de lo que cuenta como una buena razón para explicar para qué y por qué. Sin embargo, debemos entender esta afirmación de alguna determinada manera. Aquí hay

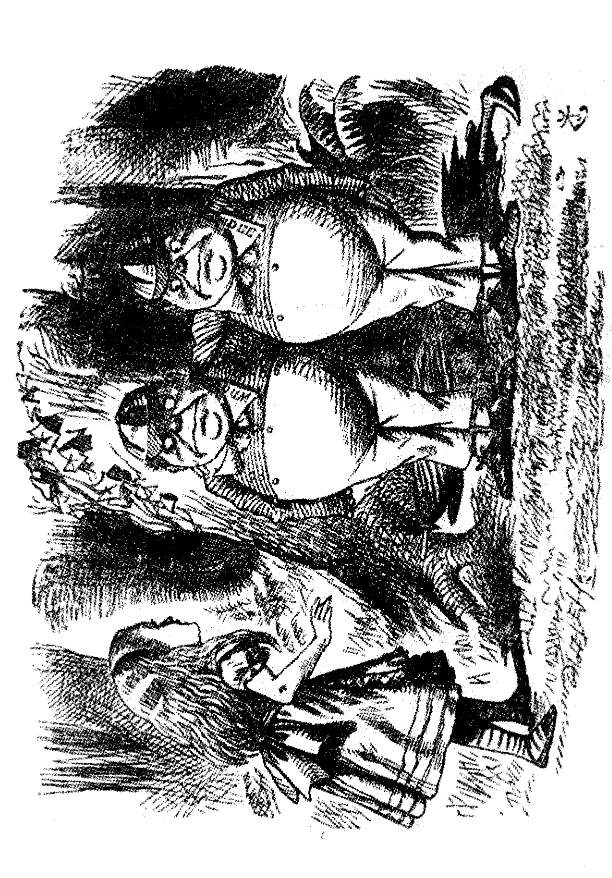


Figura 1. Tweedledum y Tweedledee debaten con Alicia los puntos más finos de la lógica.

dos probadas de razonamiento que los lógicos llaman *inferencias*:

1. Roma es la capital de Italia y este avión aterriza en Roma; entonces el avión aterriza en Italia.
2. Moscú es la capital de Estados Unidos; entonces no puedes ir a Moscú sin ir a Estados Unidos.

En cada caso, las afirmaciones anteriores a "entonces" son razones determinadas —los lógicos las llaman *premisas*—; las afirmaciones posteriores a "entonces" —que los lógicos llaman conclusiones— es aquello de lo que son razones las razones. El primer ejemplo de razonamiento está bien; pero el segundo es bastante irremediable, y no persuadirá a nadie que tenga algún conocimiento elemental de geografía: la premisa de que Moscú es la capital de Estados Unidos, es simplemente falsa. Si la premisa hubiera sido cierta —si, digamos, Estados Unidos hubiera comprado toda Rusia (y no sólo Alaska) y hubiera mudado la Casa Blanca a Moscú para estar más cerca de los centros de poder en Europa— la conclusión hubiera sido en efecto correcta. Hubiera resultado de las premisas; y en eso se interesa la lógica. No le interesa si las premisas de una inferencia son verdaderas o falsas. Ése es asunto de alguien más (en este caso, de los geógrafos). Le interesa, simplemente, si la conclusión resulta de las premisas. Los lógicos llaman *válida* a una inferencia cuando la conclusión en verdad resulta de las premisas. Así que la meta central de la lógica es comprender la validez.

Podrías pensar que ésta es una tarea aburrida, un ejercicio intelectual con un atractivo menor al de resolver crucigramas. Pero resulta que la lógica no sólo es una ma-

teria muy difícil, sino que no puede separarse de varias cuestiones filosóficas importantes (y a veces profundas). Conforme continuemos veremos algunas de ellas. Por el momento, consideremos algunos hechos básicos de la validez directa.

Para empezar, es común distinguir entre dos diferentes tipos de validez. Para entenderlo, consideremos las tres siguientes inferencias:

1. Si el ladrón hubiera entrado por la ventana de la cocina, habría huellas afuera; pero no hay huellas; así pues, el ladrón no entró por la ventana de la cocina.
2. Juan tiene manchas de nicotina en los dedos; por lo tanto, Juan es un fumador.
3. Juan compra dos paquetes de cigarros al día; por lo tanto, alguien dejó huellas afuera de la ventana de la cocina.

La primera inferencia es muy sencilla. Si las premisas son verdaderas, la conclusión deberá serlo. O para ponerlo de otra manera, las premisas no podrían ser verdaderas sin que la conclusión también lo fuera. Los lógicos llaman *deductivamente válidas* a las inferencias de este tipo. La inferencia número dos es un poco diferente. La premisa da claramente una buena razón para la conclusión, pero no es por completo conclusiva. Después de todo, Juan simplemente pudo haberse manchado los dedos para hacer creer a la gente que es fumador. Así que la inferencia no es deductivamente válida. De estas inferencias se dice que son *inductivamente válidas*. La inferencia número tres, en contraste, no tiene posibilidad alguna bajo cualquier estándar. La premisa no parece aportar

ningún tipo de razón para la conclusión. Es inválida tanto deductiva como inductivamente. De hecho, ya que la gente no es por completo idiota, si alguien ofrece una razón como ésta, podríamos asumir que hay alguna premisa extra que no se ha tomado la molestia de decirnos (quizá que alguien le pasó a Juan sus cigarros por la ventana de la cocina).

La validez inductiva es una noción muy importante. Razonamos inductivamente todo el tiempo; por ejemplo, al tratar de resolver algún problema, como cuando el auto se descompone, cuando queremos saber por qué una persona está enferma, o quién cometió un crimen. El lógico imaginario Sherlock Holmes fue un verdadero maestro de ella. A pesar de esto, históricamente, se ha dedicado mucho más esfuerzo a entender la validez deductiva, quizá porque los lógicos han tendido a ser filósofos o matemáticos (en cuyos estudios las inferencias deductivamente válidas tienen una importancia central) y no doctores o detectives. Más tarde regresaremos a la noción de inducción. Por el momento, pensemos un poco más en la validez deductiva. (Es natural suponer que la validez deductiva es la noción más simple, ya que las inferencias válidas están más a la vista. Así que no es mala idea tratar de entender primero esto, pues, como veremos, es bastante difícil.) Hasta nuevo aviso "válido" significará sólo "deductivamente válido".

Entonces, ¿qué es una inferencia válida? Como hemos visto, es aquella donde las premisas no pueden ser ciertas sin que la conclusión también lo sea. ¿Pero qué significa esto? En particular, ¿qué es lo que significa *no pueden*? En general, "no pueden" puede significar muchas cosas diferentes. Consideremos, por ejemplo: "María pue-

de tocar el piano, pero Juan no puede"; aquí hablamos de aptitudes humanas. Compara: "No puedes venir aquí: necesitas un permiso"; aquí hablamos de algo que permite o prohibe un código de reglas.

Es natural entender el sentido del "no puedes" relevante para el presente caso de esta forma: decir que las premisas no pueden ser verdaderas sin que la conclusión lo sea es decir que en todas las situaciones donde todas las premisas son verdaderas, también lo es la conclusión. Hasta aquí está bien; pero ¿qué es exactamente una situación? ¿Qué tipo de cosas intervienen en su conformación, y cómo se relacionan estas cosas entre sí? ¿Y qué es que sea *verdadero*? Ahora, aquí, hay un problema filosófico para ti, parece decirnos Tweedledee.

Estas cuestiones nos interesarán luego; pero dejémoslas por el momento, y terminemos con algo más. No debemos irnos corriendo y dejar así, nada más, la idea de que la explicación de la validez deductiva que acabo de dar no tiene problemas. (En filosofía, todas las afimaciones interesantes son contenciosas.) Aquí hay una dificultad. Suponiendo que la declaración sea correcta, saber que una inferencia es deductivamente válida es saber que no hay situaciones donde las premisas sean verdaderas y la conclusión no. Ahora, en cualquier comprensión razonable de lo que es una situación, hay una gran cantidad de ellas: situaciones relacionadas con los planetas de estrellas distantes; situaciones con acontecimientos anteriores a que hubiera seres vivientes en el cosmos; situaciones descritas en obras de ficción; situaciones imaginadas por visionarios. ¿Cómo podemos saber lo que influye en todas las situaciones? Peor aún, parece que hay un número infinito de situaciones (situaciones de aquí a un año, situaciones

de aquí a dos años, situaciones de aquí a tres años...). Es, por lo tanto, imposible, incluso en principio, examinar todas las situaciones. Así que si esta afirmación de validez es correcta, y ya que podemos considerar las inferencias válidas o inválidas (al menos en muchos casos) debemos tener alguna revelación de alguna fuente especial. ¿Qué fuente?

¿Necesitamos invocar algún tipo de intuición mística? No necesariamente. Consideremos un problema análogo. Todos podemos distinguir entre cadenas gramaticales de palabras y cadenas no gramaticales de nuestra lengua materna sin mayor problema. Por ejemplo, cualquier hablante nativo del español reconocerá que "Esto es una silla" es una oración que sigue una cadena gramatical, pero "Una es esto silla" no. Pero parece que hay un número infinito de oraciones gramaticales y no gramaticales. (Por ejemplo, "Uno es un número", "Dos es un número", "Tres es un número", ... son todas oraciones gramaticales. Y es fácil hacer ensaladas de palabras ad libitum). ¿Entonces cómo lo hacemos? Noam Chomsky, quizá el lingüista moderno más importante, sugirió que podemos hacerlo debido a que las colecciones infinitas están encapsuladas en una colección finita de reglas que están muy enraizadas en nosotros; que la evolución nos ha programado con una gramática interna. ¿Podría ser igual la lógica? ¿Están las reglas de la lógica tan enraizadas en nosotros de la misma forma?

Principales ideas del capítulo

- Una inferencia válida es aquella en la que la conclusión resulta de la(s) premisa(s).
- Una inferencia deductivamente válida es aquella en la que no hay una situación donde todas las premisas sean verdaderas, pero la conclusión no.

2. FUNCIONES DE VERDAD ¿O NO?

Ya sea que las reglas de la validación estén muy enraizadas en nosotros o no, todos tenemos intuiciones muy fuertes sobre la validez de varias inferencias. No habría mucho desacuerdo, por ejemplo, en que la siguiente inferencia es válida: "Ella es mujer y banquera, así que ella es banquera". O en que la siguiente inferencia es inválida: "Él es carpintero, así que él es carpintero y juega beisbol".

Pero algunas veces nuestras intuiciones pueden meternos en problemas. ¿Qué piensas de la siguiente inferencia? Las dos premisas aparecen sobre la línea, la conclusión debajo de ella.

La reina es rica.   La reina no es rica.

Los cerdos pueden volar.

Desde luego que no parece válida. La riqueza de la reina —grande o no— no parece tener relación con las habilidades aeronáuticas de los cerdos.

¿Pero qué pensamos sobre las siguientes dos inferencias?

La reina es rica.

O la reina es rica o los cerdos pueden volar.

O la reina es rica o los
cerdos pueden volar. La reina no es rica.

Los cerdos pueden volar.

La primera de éstas parece válida. Considera su conclusión. Los lógicos llaman *disyunción* a este tipo de oraciones; y las cláusulas a ambos lados de "o" se llaman disyuntivas. Luego, ¿qué se necesita para que una disyunción sea verdadera? Sólo que cualquiera de las disyuntivas sea verdad. Así que en cualquier situación donde una premisa es verdadera, lo es la conclusión. La segunda inferencia también parece válida. Si una u otra de dos afirmaciones es verdadera y una de éstas no lo es, la otra debe serlo.

Entonces el problema es que al poner juntas estas dos inferencias en apariencia válidas, obtenemos una inferencia inválida, como ésta:

La reina es rica.

O la reina es rica o
los cerdos pueden volar. La reina no es rica.

Los cerdos pueden volar.

Esto no puede ser verdad. Encadenar inferencias válidas de esta manera no puede darnos una inferencia inválida. Si todas las premisas son verdaderas en cualquier situación, entonces también lo son sus conclusiones, las conclusiones que resultan de *éstas*; y así, hasta que alcanzamos la conclusión final. ¿Qué ha salido mal?

Para dar una respuesta ortodoxa a esta pregunta, centrémonos un poco más en los detalles. Para empezar, es-

cribamos la oración "Los cerdos pueden volar" como p, y la oración "La reina es rica" como q. Esto hace las cosas un poco más compactas; pero no sólo eso: si piensas en ello por un momento, puedes ver que las dos oraciones en particular que se están usando en el ejemplo de arriba no tienen mucho que ver con las cosas. Pude haber organizado todo usando dos oraciones cualquiera; así que podemos ignorar su contenido. Eso es lo que hacemos al escribir las oraciones sólo como un par de letras.

La oración "O la reina es rica o los cerdos pueden volar" ahora se vuelve "Ya sea que q o p". Los lógicos escriben esto como $q \vee p$. ¿Qué hay sobre "La reina no es rica"? Reescribamos esto como "no es el caso si la reina es rica" agregando la partícula negativa al frente de la oración. Por lo tanto la oración se vuelve "no es el caso de que q". Los lógicos escriben esto como $\sim q$, y lo llaman la *negación* de q o *no* q. Mientras estamos en ella, ¿qué hay de la oración "La reina es rica y los cerdos pueden volar", esto es, "q y p"? Los lógicos escriben esto como $q \wedge p$ y la llaman *conjunción* de q y p, q y p son los conjuntos. Con este mecanismo bajo la manga, podemos escribir la inferencia encadenada que encontramos así:

$$\dfrac{\dfrac{q}{q \vee p} \quad \sim p}{p}$$

¿Qué podemos decir de esta inferencia?

La oraciones pueden ser verdaderas, y pueden ser falsas. Usemos V para verdadero, y F para falso. Gracias a uno de los fundadores de la lógica moderna, el filóso-

fo-matemático alemán Gottlob Frege, a éstas se les llama frecuentemente *valores de verdad*. Dada cualquier oración, *a*, ¿cuál es la conexión entre el valor de verdad de *a* y el de su negación, ~*a*? Una respuesta natural es que si una es verdadera la otra es falsa, y viceversa. Podemos registrar esto como sigue:

> ~*a* tiene el valor *V* sólo si *a* tiene el valor *F*.
> ~*a* tiene el valor *F* sólo si *a* tiene el valor *V*.

Los lógicos llaman a esto las *condiciones de verdad* para la negación. Si asumimos que cada oración es verdadera o falsa, pero no ambas, podemos representar las condiciones en la siguiente tabla, que los lógicos llaman *tabla de verdad*:

a	~*a*
V	*F*
F	*V*

Si *a* tiene el valor de verdad dado en la columna de abajo, ~*a* tiene el valor correspondiente de la derecha.

¿Qué hay de la disyunción, ∨? Como ya lo he resaltado, una suposición natural es que una disyunción, *a* ∨ *b*, es verdadera si *a* o *b* (o quizá ambas) son verdaderas, y falsa si ninguna de las dos lo es. Podemos registrar esto en las condiciones de verdad para la disyunción:

> *a* ∨ *b* tiene el valor *V* sólo si al menos *a* o *b* tienen el valor *V*

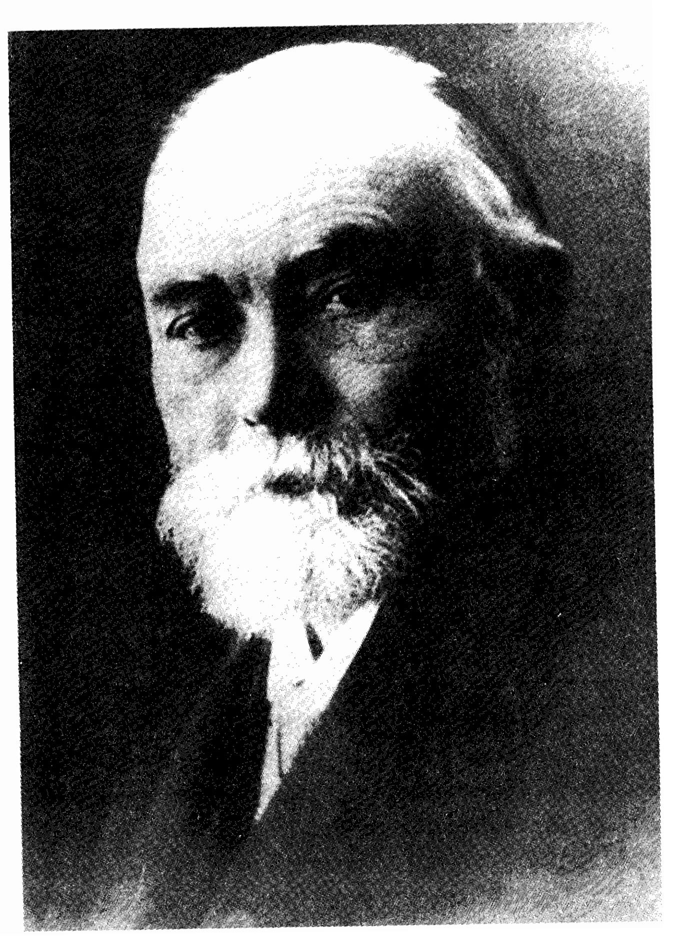


Figura 2. Gottlob Frege (1848-1925), uno de los fundadores de la lógica moderna.

$a \vee b$ tiene el valor *F* sólo si tanto *a* como *b* tienen el valor *F*.

a	b	$a \vee b$
V	*V*	*V*
V	*F*	*V*
F	*V*	*V*
F	*F*	*F*

Cada renglón —excepto el primero, que es el encabezado— registra ahora una combinación posible de valores para *a* (primera columna) y *b* (segunda columna).

Hay cuatro posibles combinaciones, y por lo tanto cuatro renglones. Para cada combinación, el valor correspondiente de $a \vee b$ está asentado a su derecha (tercera columna).

De nuevo, mientras estamos en eso, ¿cuál es la conexión entre los valores verdaderos de *a* y *b* y de los de $a \wedge b$? Una suposición natural es que $a \wedge b$ es verdadera si tanto *a* y *b* son verdaderas, y falsa de otra manera. Así, por ejemplo, "Juan tiene 35 años y pelo café" es verdadera sólo si "Juan tiene 35 años" y "Juan tiene el pelo café" son verdaderas. Podemos registrar esto en las condiciones de verdad para la conjunción:

$a \wedge b$ tiene el valor *V* sólo si tanto *a* como *b* tienen el valor *V*.

$a \wedge b$ tiene el valor *F* sólo si al menos una de *a* y *b* tiene el valor *F*.

Estas condiciones pueden representarse en la siguiente tabla de verdad:

a	b	$a \wedge b$
V	*V*	*V*
V	*F*	*F*
F	*V*	*F*
F	*F*	*F*

Ahora, ¿cómo soporta todo esto el problema con el que empezamos? Regresemos a la pregunta que hice al final del capítulo anterior: ¿qué es una situación? Un pensamiento natural es que cualquier cosa que sea una situación, determina un valor de verdad para cada oración. Así, por ejemplo, en una situación en particular, podría ser cierto que la reina fuera rica y los cerdos podrían volar. (¡Advirtamos que estas situaciones son meramente hipotéticas!) En otras palabras, una situación determina que cada proposición pueda ser tanto *V* como *F*. En estas proposiciones no aparece nunca "y", "o", o "no" ($\wedge$, $\vee$, $\sim$). Dada la información básica sobre una situación, podemos usar tablas de verdad para resolver los valores de verdad de las proposiciones que intervienen.

Por ejemplo, imagina que tenemos la siguiente situación:

$p : V$
$q : F$
$r : V$

(*r* podría ser la oración "el betabel es nutritivo", y "p : *V*" significa que a *p* se le asignó el valor verdadero de *V*,

etcétera.) ¿Cuál es el valor de verdad de, digamos, $p \wedge (\sim r \vee q)$? Resolvemos el valor verdadero de esto exactamente de la misma manera en que resolveríamos el valor numérico de $3 \times (-6 + 2)$ usando tablas de multiplicación y sumas. El valor de verdad de r es V. Así que la tabla de verdad para $\sim$ nos dice que el valor verdadero de $\sim r$ es F. Pero ya que el valor de q es F, la tabla de valores para $\wedge$ nos dice que el valor de $p \wedge (\sim r \vee q)$ es F. De esta forma paso a paso, podemos resolver el valor verdadero de cualquier fórmula que contenga las ocurrencias de $\wedge$, $\vee$ y $\sim$.

Ahora, recuerda del capítulo anterior que una inferencia es válida con tal que no haya alguna situación en que todas las premisas verdaderas, y la conclusión no verdadera (falsa). Esto es, es válida si no hay manera de asignar V y F a las proposiciones, lo que resultaría en que todas las premisas tuvieran el valor V y la conclusión el valor F. Considera, por ejemplo, la inferencia que ya conocemos, $q \,/\, q \vee p$. (Escribo esto en una sola línea para ahorrar dinero a Oceano.) Las oraciones relevantes son q y p. Hay cuatro combinaciones de valores de verdad, y por cada una de ellas podemos obtener los valores de verdad para la premisa y la conclusión. Podemos representar el resultado así:

q	p	q	$q \vee p$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Las dos primeras columnas nos dan todas las combinaciones posibles de valores de verdad para q y p. Las dos últimas columnas nos dan los valores correspondientes a la premisa y la conclusión. La tercera columna es igual a la primera. Éste es una accidente de este ejemplo, debido al hecho de que, en este caso en particular, la premisa resulta ser una de las proposiciones. La cuarta columna puede leerse a partir de la tabla de verdad para la disyunción. Dada esta información, podemos ver que la inferencia es válida. Ya que no hay renglón donde la premisa q sea verdadera y la conclusión, $q \vee p$, no lo sea.

¿Qué hay sobre la inferencia $q \vee p$, $\sim q \,/\, p$? Procediendo de la misma manera, obtenemos:

q	p	$q \vee p$	$\sim q$	p
V	V	V	F	V
V	F	V	F	F
F	V	V	V	V
F	F	F	V	F

En esta ocasión, hay cinco columnas porque hay dos premisas. Los valores de verdad de las premisas y la conclusión pueden leerse a partir de las tablas de verdad para la disyunción y la negación. Y de nuevo, no hay un solo renglón donde ambas premisas sean verdaderas y la conclusión no. Por lo tanto, la inferencia es válida.

¿Qué hay de la inferencia con la que empezamos: q, $\sim q \,/\, p$? Procediendo como antes, obtenemos:

q	p	q	$\sim q$	p
V	V	V	F	V
V	F	V	F	F
F	V	F	V	V
F	F	F	V	F

De nuevo, la inferencia es válida; y ahora sabemos por qué. No hay renglón en el que ambas premisas sean verdaderas y la conclusión, falsa. En efecto, no hay algún renglón en el que ambas premisas sean verdaderas. ¡En verdad la conclusión no importa para nada! Algunas veces, los lógicos describen esta situación diciendo que la inferencia es *vacuamente* válida, sólo porque las premisas nunca podrán ser verdaderas al estar juntas.

Aquí, entonces, hay una solución al problema con el que empezamos. De acuerdo con esta solución, nuestras intuiciones originales sobre esta inferencia están mal. Después de todo, las intuiciones de la gente con frecuencia pueden llevar a conclusiones erróneas. Para todos parece obvio que la tierra no se mueve, hasta que toman un curso de física y descubren que en realidad está girando en el espacio. Incluso podemos ofrecer una explicación de por qué estuvieron equivocadas nuestras intuiciones lógicas. Pero la mayoría de las inferencias que encontramos en la práctica no son de este tipo. Nuestras intuiciones se desarrollan en esta clase de contexto y no aplican de manera general, igual que los hábitos que se construyen al aprender a caminar (por ejemplo, no inclinarnos) no siempre funcionan en otros contextos (por ejemplo, cuando aprendemos a andar en bicicleta).

Regresaremos a esta materia en un capítulo posterior. Pero terminemos este con una breve mirada a la adecuación del mecanismo que hemos utilizado. Aquí las cosas no son tan sencillas como uno hubiera esperado. De acuerdo con esta explicación, el valor de verdad de la oración $\sim a$ está completamente determinado por el valor de verdad de la sentencia a. De la misma manera, los valores de verdad de las proposiciones $a \vee b$ y $a \wedge b$ están completamente determinados por los valores de verdad de a y b. Los lógicos llaman a las operaciones que funcionan así *funciones de verdad*. Pero hay buenas razones para suponer que, como ocurre en el español, "y" y "o" no son funciones de verdad, al menos, no siempre.

Por ejemplo, de acuerdo con la tabla de valores para $\wedge$, "a y b" siempre tiene el mismo valor verdadero de "b y a": a saber, ambos son verdaderos si a y b también son verdaderos, y falsos de otra manera. Mas consideremos las oraciones:

1. Juan se golpeó la cabeza y se cayó.
2. Juan se cayó y se golpeó la cabeza.

La primera dice que Juan se golpeó la cabeza y se cayó. La segunda dice que Juan se cayó *y entonces* se golpeó la cabeza. Es claro que la primera puede ser verdadera mientras que la segunda es falsa y viceversa. Por tanto, no sólo son importantes los valores de verdad de los conjuntos, sino cuál causó cuál. Problemas similares acosan a "o". De acuerdo con el cálculo que tenemos, "a o b" es verdadera si a o b son verdaderas. Pero supongamos que un amigo nos dice:

O sales ahora o llegaremos tarde;

y entonces salimos. Dada la tabla de valores para $\vee$, la disyunción es verdadera. Pero supongamos que descubrimos que nuestro amigo nos ha estado engañando: hubiéramos podido salir media hora después y aún así llegar a tiempo. Bajo estas circunstancias, con seguridad diremos que nuestro amigo ha mentido: lo que ha dicho era falso. De nuevo, lo importante no son simplemente los valores de verdad, sino la existencia de una conexión de cierto tipo entre ellos.

Ahora debemos pensar en estos temas. El material que hemos visto nos da por lo menos una explicación funcional de cómo trabaja cierta maquinaria lógica. Utilizaremos esto en los próximos capítulos, a menos que la idea de esos capítulos lo anule explícitamente, lo cual ocurrirá algunas ocasiones.

La maquinaria en cuestión trata sólo con cierto tipo de inferencias: existen muchos otros. Apenas hemos empezado.

Principales ideas del capítulo

- En una situación se asigna a cada proposición un valor único de verdad (*V* o *F*).
- $\sim a$ es *V* sólo si a es *F*.
- $a \vee b$ es *V* si al menos $a \wedge b$ es *V*.
- $a \wedge b$ es *V* sólo si tanto a como b son *V*.

3. NOMBRES Y CUANTIFICADORES: ¿NADA ES ALGO?

Las inferencias que hemos observado en el capítulo anterior involucraban frases como "o" y "no es el caso que", palabras que agregan o unen oraciones completas para hacer otras oraciones completas; pero hay muchas inferencias que parecen trabajar de manera muy diferente. Considera, por ejemplo, la inferencia:

Marcos me dio un libro
―――――――――――――
Alguien me dio un libro

Ni la premisa ni la conclusión tienen una parte que, en sí misma, sea una oración completa. Si la inferencia es válida, lo es por lo que ocurre *dentro* de las oraciones completas.

La gramática tradicional nos dice que las oraciones completas más simples están compuestas por un *sujeto* y un *predicado*. Entonces, consideremos los ejemplos:

1. Marcos vio al elefante.
2. Anita se durmió.
3. Alguien me pegó.
4. Nadie vino a mi fiesta.

La primera palabra, en cada caso, es el sujeto de la oración: nos dice de qué estamos hablando. El resto es el



Figura 3. Nadie.

predicado: nos dice algo sobre él. Ahora bien, ¿cuándo es verdadera una oración así? Tomemos el segundo ejemplo. Es verdadera si el objeto al que se refiere el sujeto "Anita" tiene la propiedad expresada por el predicado, esto es, se durmió.

Todo correcto y bien, pero ¿a qué se refiere el objeto de la oración 3? ¿A la persona que me pegó? Pero tal vez nadie me pegó. Nadie dijo que ésta era una oración verdadera. El caso de la oración 4 es aún peor. ¿A quién se refiere "nadie"? En *A través del espejo*, justo antes de su encuentro con el león y el unicornio, Alicia se cruza con el Rey Blanco, quien espera a un mensajero. (Por alguna razón, cuando el mensajero voltea, se parece sorprendentemente a un conejo.) Cuando el Rey se encuentra a Alicia, le dice:

> –Sólo observa por el camino, y dime si puedes ver… [al Mensajero].
>
> –Puedo ver a nadie en el camino —dijo Alicia.
>
> –Desearía tener semejantes ojos —resaltó el Rey en un tono impaciente. ¡Para ser capaz de ver a Nadie! ¡Y también a esa distancia! ¡Hombre, es todo lo que puedo hacer para ver personas reales, con esta luz!

Carroll está haciendo un chiste lógico, como ocurre con frecuencia. Cuando Alicia dice que ve a nadie, no está diciendo que puede ver a una persona —real o de cualquier tipo. "Nadie" no se refiere a una persona —o a cualquier otra cosa.

Los lógicos modernos llaman *cuantificadores* a palabras como "nadie", "alguien" y "todos". Se distinguen de nombres como "Marcos" o "Anita". Lo que acaba-

mos de ver es que, si bien tanto los cuantificadores como los nombres propios pueden ser los sujetos gramaticales de oraciones, deben funcionar de formas muy diferentes. ¿Cómo funcionan los cuantificadores?

Aquí hay una respuesta moderna estándar. Una situación está provista de una cantidad de objetos. En nuestro caso, los objetos relevantes son todas las personas. Todos los nombres que aparecen en nuestro razonamiento sobre esta situación se refieren a uno de los objetos en esta colección. Por lo tanto, si escribimos m para "Marcos", m se refiere a uno de estos objetos. Y si escribimos H por "es feliz", entonces la oración mH es verdadera en la situación precisa en que el objeto al que nos referimos como m tiene la propiedad expresada por H. (Por perversas razones propias, los lógicos con frecuencia invierten el orden, y escriben Hm en vez de mH. Es sólo cuestión de costumbre.)

Ahora considera la oración "Alguien es feliz". Esto sólo es verdad en la situación en que hay un objeto u otro, en la colección de objetos, que es feliz —esto es, algún objeto de la colección, llamémoslo x, es tal que x es feliz. Escribamos "Algún objeto, x, es tal que" como: $\exists x$. Entonces podríamos escribir la oración como: "$\exists x$ x es feliz"; o, recordando que estamos escribiendo "es feliz" como H, así: $\exists x\ xH$. Los lógicos a veces llaman a $\exists x$ *cuantificador particular*.

¿Qué hay de "Todos son felices"? Esto es verdad en una situación en la que *cada* objeto de la colección relevante es feliz. Esto es, cada objeto, x, de la colección es tal que x es feliz. Si escribimos "Cada objeto, x, es tal que" como $\forall x$, entonces podemos escribir esto como $\forall x\ xH$. Los lógicos usualmente llaman a $\forall x$ *cuantificador universal*.

Ahora no hay premios por adivinar cómo vamos a entender "Nadie es feliz". Esto sólo significa que no hay objeto, x, de la colección relevante, tal que x sea feliz. Podemos tener un símbolo especial que signifique "Ningún objeto, x, es tal que". Pero de hecho, los lógicos normalmente no se molestan en usarlo. Porque decir que nadie es feliz es decir que no es el caso que alguien es feliz. Así que podemos escribir esto como $\sim\exists x\ xH$.

Este análisis de cuantificadores nos muestra que los nombres y los cuantificadores funcionan de manera muy diferente. En particular, el hecho de que "Marcos es feliz" y "Alguien es feliz" se escriban como mH y $\exists x\ xH$, respectivamente, nos muestra esto, además, esa forma gramatical aparentemente simple puede llevar a conclusiones erróneas. No todos los sujetos gramaticales son iguales. Incidentalmente, esto nos muestra por qué la inferencia con la que empezamos es válida. Escribamos G para "me dio el libro". Entonces la inferencia es:

$$\frac{mG}{\exists x\ xG}$$

Es claro que si, en alguna situación, el objeto referido por el nombre m me dio el libro, entonces algún objeto de la colección relevante me dio el libro. Por contraste, el Rey Blanco está deduciendo del hecho de que Alicia vio a nadie que ella vio a alguien (a saber, Nadie). Si escribimos "es visto por Alicia" como A entonces la inferencia del Rey es:

$$\frac{\sim\exists x\ xA}{\exists x\ xA}$$

Esto es claramente inválido. Si no hay ningún objeto en el dominio relevante que fue visto por Alicia, obviamente no es verdad que haya algún objeto del dominio relevante que fuera visto por ella.

Podrías pensar que es mucho alboroto por nada; de hecho, sólo una manera de echar a perder un buen chiste. Pero es mucho más serio que eso; puesto que los cuantificadores juegan un papel central en muchos argumentos importantes en matemáticas y filosofía. Aquí hay un ejemplo filosófico. Es una suposición natural de que no pasa nada sin explicación: las personas no se enferman sin razón; los autos no se descomponen sin haber tenido alguna falla. Todo, entonces, tiene una causa. ¿Pero cuál podría ser la causa de todo? Obviamente no puede ser nada físico, como una persona; o incluso algo como el Big Bang de la cosmología. Esas cosas deben tener sus propias causas. Así que debe ser algo metafísico. Dios es el candidato obvio.

Ésta es una versión de un argumento para la existencia de Dios, con frecuencia llamado el *Argumento Cosmológico*. Uno podría objetarlo de diversas maneras. Pero en su corazón hay una enorme falacia lógica. La oración "Todo tiene una causa" es ambigua. Puede significar que todo lo que sucede tiene una causa u otra; esto es, para cada x hay una y, de tal forma que x es causada por y; o puede significar que hay algo que es la causa de todo, esto es, hay alguna y para cada x, x es causada por y. Pensemos en el dominio relevante de los objetos como causas y efectos, y escribamos "x es causado por y" como: xCy. Entonces podemos escribir estos dos significados, respectivamente como:

1. $\forall x\, \exists y\, xCy$
2. $\exists y\, \forall x\, xCy$

Ahora, éstas no son lógicamente equivalentes. La primera se sigue de la segunda. Si hay una cosa que es la causa de *todo*, entonces, desde luego, todo lo que sucede tiene *alguna* causa u *otra*, pero no resulta que haya una cosa y la misma que sea la causa de todo. (Compara: de "Todos tienen una madre", no resulta que "haya alguien que sea la madre de todos".)

Esta visión del Argumento Cosmológico negocia con la ambigüedad. Lo que se establece al hablar de enfermedades y autos es 1. Pero inmediatamente, el argumento cambia al preguntar cuál es la causa, asumiendo que 2 es lo que se ha establecido. Además, tal deslizamiento está oculto porque, en español, "Todo tiene una causa" puede usarse para expresar tanto 1 como 2. Notemos también, que no hay ambigüedad si los cuantificadores se reemplazan por nombres. "La radiación de fondo del cosmos es causada por el Big Bang" no es del todo ambigua. Bien podría ser que una falla al distinguir entre nombres y cuantificadores sea una razón adicional de por qué uno podría fallar al ver esta ambigüedad.

Así que una comprensión correcta de los cuantificadores es importante, no sólo por lógica. Las palabras "algo", "nada", etcétera, no suplen a los objetos, sino que funcionan de una manera muy diferente. O, al menos, pueden hacerlo: las cosas no son tan simples. Considera al cosmos de nuevo. O se extiende infinitamente hacia el pasado, o empezó a existir en un tiempo en particular. En el primer caso, no tuvo comienzo, sino que siempre estuvo ahí; en el segundo, empezó en un momento deter-

minado. En diferentes épocas, la física nos ha dicho diferentes cosas sobre la verdad de este asunto. Sin importar esto, sin embargo, sólo considera la segunda posibilidad. En este caso, el cosmos empezó a existir de la nada —o de nada físico—, siendo el cosmos, de todas formas, la totalidad de todo lo físico. Ahora considera esa oración. "El cosmos empezó a existir de la nada." Dejemos que c sea el cosmos, y escribamos "x empezó a existir de y" como xEy. Entonces, dada nuestra comprensión de los cuantificadores, esta oración debería significar $\sim\exists x\, cEx$. Pero no significa esto; ya que esto es igualmente verdadero en la primera alternativa cosmológica. En ésta, el cosmos, siendo infinito en tiempo pasado, no empezó a existir del todo. En particular, entonces, no empezó a existir *de* algo o de otro. Cuando decimos que en la segunda cosmología el cosmos empezó a existir de la nada, queremos decir que vino a ser de la *nada*. Así que nada *puede* ser una cosa. Después de todo el Rey Blanco no era tan tonto.

Principales ideas del capítulo

- La oración nP es verdadera en una situación si el objeto al que se refiere por n tiene la propiedad expresada por P en esa situación.
- $\exists x\, xP$ es verdadera en una situación sólo si algún objeto en la situación, x, es aquél de xP.
- $\forall x\, xP$ es verdadera en una situación sólo si cada objeto en la situación, x, es aquél de xP.

4. DESCRIPCIONES Y EXISTENCIA: ¿ADORARON LOS GRIEGOS A ZEUS?

Mientras estamos en el tópico de sujetos y predicados, hay cierto tipo de frases, del que aún no hemos hablado, que puede ser el objeto de oraciones. Por lo común, los lógicos los denominan *descripciones definidas*, y a veces sólo *descripciones* —aunque debes advertir que es un término técnico. Las descripciones son frases como "el hombre que aterrizó primero en la Luna" y "el único objeto en la Tierra hecho por el hombre que es visible desde el espacio". En general, las descripciones tienen la forma: *el objeto que satisface tal y cual situación.* Siguiendo al filósofo y matemático inglés Bertrand Russell, uno de los fundadores de la lógica moderna, podemos escribirlas como sigue. Reescribe "el hombre que aterrizó primero en la Luna" como: "el objeto, x, de tal forma que x es un hombre y x aterrizó primero en la Luna". Ahora escribe ιx *para* "el objeto, x, tal que", y esto se convierte en: "ιx(x es un hombre y x aterrizó primero en la Luna)". Si escribimos M para "es un hombre" y F para "aterrizó primero en la Luna", entonces obtenemos: $\iota x(xM \,\&\, xF)$. En general, una descripción es algo de la forma $\iota x c_x$, donde c_x es una condición que contiene apariciones de x. (Para eso está el pequeño subíndice x como recordatorio.)

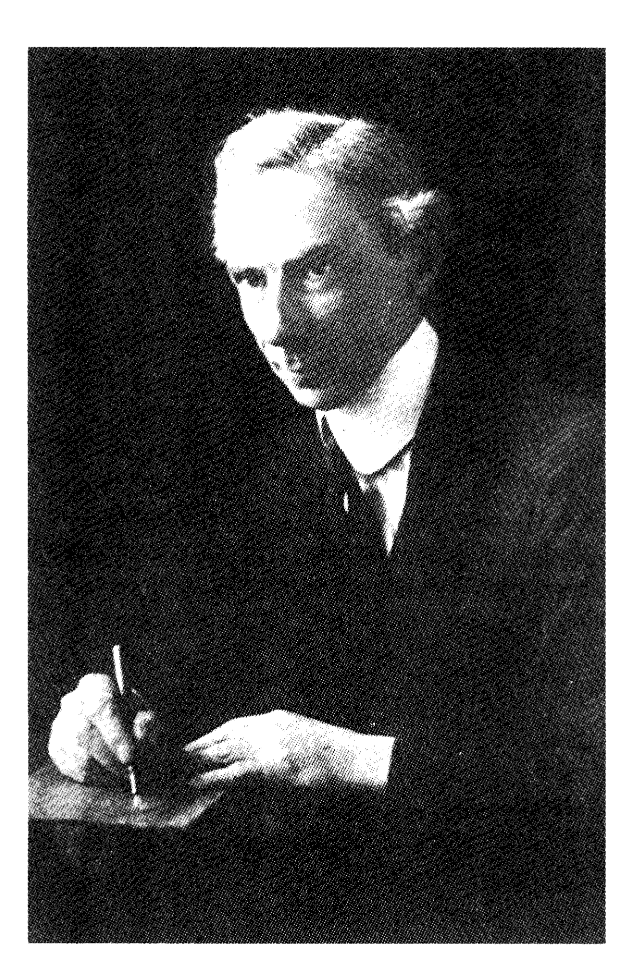


Figura 4. Bertrand Russell (1872-1970), otro de los fundadores de la lógica moderna.

Ya que las descripciones son sujetos, pueden combinarse con los predicados para hacer oraciones completas. Así, si escribimos *U* para "nació en Estados Unidos", entonces "el hombre que aterrizó primero en la Luna nació en Estados Unidos" es: $\iota x(xM \;\&\; xF)U$. Escribamos μ como signo taquigráfico para $\iota x(xM \;\&\; xF)$. (Utilicé una letra griega para recordarte que es en realidad una descripción.) Entonces esto es μU. Igual: "el primer hombre que aterrizó en la Luna es un hombre y él aterrizó primero en la Luna" es $\mu M \;\&\; \mu F$.

En términos de la división del último capítulo, las descripciones son nombres, no cuantificadores. Esto es, se refieren a objetos (si tenemos suerte: regresaremos a ello). Así, "el hombre que aterrizó primero en la Luna nació en Estados Unidos", μU, es verdad sólo si la persona en particular a la que se refiere la frase μ tiene la propiedad expresada por *U*.

Pero las descripciones son tipos especiales de nombres. A diferencia de lo que podemos llamar *nombres propios*, como "Anita" y "el Big Bang", llevan información sobre el objeto al que se refieren. Así, por ejemplo, "el hombre que aterrizó primero en la Luna" lleva la información de que el objeto al que se refiere tiene la propiedad de ser un hombre y de ser el primero en la Luna. Todo esto puede parecer banal y obvio, pero las cosas no son tan simples como parecen. Ya que las descripciones llevan información de esta manera, con frecuencia son centrales para argumentos importantes en matemáticas y filosofía; y una manera de apreciar algunas de estas complejidades es considerar un ejemplo de real argumento. Éste es otro argumento sobre la existencia de Dios, con frecuencia llamado el *Argumento Ontológico*. El argumen-

to tiene varias versiones, pero aquí hay una forma simple de él:

> Dios es el ser con todas las perfecciones.
> Pero la existencia es una perfección.
> Así que Dios tiene existencia.

es decir, Dios existe. Si no se han encontrado antes con este argumento, parecerá confuso. Para empezar, ¿qué es una perfección? Más o menos, una perfección es algo así como la omnisciencia (saber todo lo que hay por saber), la omnipotencia (hacer todo lo que pueda hacerse), y la perfección moral (actuar siempre de la mejor manera posible). En general, las perfecciones son todas esas propiedades que es muy bueno tener. Ahora, la segunda premisa dice que la existencia es una perfección. ¿Por qué debe ser cierto? La razón por la que podríamos suponer esto es muy compleja, y está enraizada en la filosofía de uno de los dos pensadores griegos más importantes, Platón. Por fortuna, podemos trabajar sobre este tema. Podemos hacer una lista de propiedades como omnisciencia, omnipotencia, etcétera; incluyamos a la existencia en la lista, y simplemente dejemos que "perfección" signifique cada propiedad de ésta. Por otra parte, tomemos a "Dios" como sinónimo de determinada descripción, a saber, "el ser que tiene todas las perfecciones (es decir, las propiedades de la lista)". En el Argumento Ontológico, ambas premisas ahora son verdad por definición, y así surgen de la imagen. Entonces el Argumento se reduce a una línea:

> El objeto que es omnisciente, omnipotente, moralmente perfecto, … y existe, existe.

y, podríamos agregar, es omnipotente, moralmente perfecto, y así sucesivamente. Esto bien parece ser cierto. Para hacer las cosas más claras, supongamos que escribimos la lista de las propiedades de Dios como $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Así que la última, P_n, es la existencia. La definición de "Dios" es: $\iota x(xP_1 \wedge \ldots \wedge xP_n)$. Escribamos γ para esto último. Entonces queda $\gamma P_1 \wedge \ldots \wedge \gamma P_n$ (de la que se sigue γP_n).

Este es un caso especial de algo más general, a saber: *el objeto que satisface tal y tal condición, satisface esa misma condición*. Esto con frecuencia se llama el *Principio de Caracterización* (una cosa que tiene las propiedades que la caracterizan). Abreviaremos esto como PC. Ya hemos encontrado un ejemplo de PC, con "el primer hombre que aterrizó en la Luna es un hombre y aterrizó primero en la Luna", μM & μF. En general, obtenemos un caso de PC si tomamos alguna descripción, $\iota x c_x$, y la sustituimos por cada aparición de x en la condición c_x.

Ahora, para todo el mundo, PC parece ser verdadero por definición. Por supuesto, las cosas tienen esas propiedades que se caracterizan por tener. Desafortunadamente, en general, esto es falso, ya que muchas cosas que se siguen de ello son falsas sin discusión.

Para empezar, podemos usarlo para deducir la existencia de todo tipo de cosas que en realidad no existen. Consideremos a los números enteros (no-negativos): 0, 1, 2, 3, … Ahí no hay un máximo. Pero al usar PC, podemos mostrar la existencia de un máximo. Dejemos que c_x sea la condición "x es el máximo entero $\wedge$ x existe". Dejemos que δ sea $\iota x c_x$. Entonces el PC nos da "δ es el máximo entero, y δ existe". Los disparates no acaban aquí. Consideremos a una persona soltera, digamos el Papa. Podemos probar que es casado. Dejemos que c_x sea la condición

"x casó con el Papa". Dejemos que δ sea la descripción $\iota x c_x$. El PC nos da "δ se casó con el Papa, alguien casó con el Papa, es decir, el Papa está casado.

¿Qué podemos decir de esto? Una respuesta moderna estándar es más o menos así. Consideremos la descripción $\iota x c_x$. Si hay un solo objeto que satisface la condición c_x en alguna situación, entonces la descripción se refiere a él. De otro modo, se refiere a nada: es un "nombre vacío". Entonces, hay una x única, tal que x es un hombre y x aterrizó primero en la Luna, Armstrong. Así que "la x tal que x es un hombre y x aterrizó primero en la Luna" se refiere a Armstrong. Del mismo modo, sólo hay un entero menor, a saber 0; por lo tanto, la descripción el objeto que es el entero menor denota 0. Pero ya que no existe *el* mayor entero, "el objeto que es el máximo entero" fracasa en su propósito de referirse a cualquier cosa. De igual forma, la descripción "la ciudad de Australia que tiene más de un millón de personas" también fracasa. En esta ocasión, porque no haya semejantes ciudades, sino porque hay muchas de ellas.

¿Qué tiene que ver esto con el PC? Bueno, si hay un solo objeto que satisface a c_x en alguna situación, entonces $\iota x c_x$ se refiere a él. Así que el caso del PC que interesa a c_x es verdad: $\iota c x_x$ es una de las cosas —de hecho, la única— que satisface a c_x. En particular, el menor entero es (en verdad) el menor entero; la ciudad que es la capital federal de Australia es, en verdad, la capital federal de Australia, etcétera. Algunos casos del PC se sostienen así. Pero ¿qué pasa si no hay un objeto único que satisfaga a c_x? Si n es un nombre y P un predicado, la oración nP es cierta sólo si hay un objeto al que se refiere n, y tiene la propiedad expresada por P. Por lo tanto, si n no denota a algún objeto, nP debe ser falso. Así, si no hay una sola cosa única que tenga la propiedad P (si, por ejemplo, P es un "caballo alado") $(\iota x\, xP)P$ es falso. Como es de esperarse, bajo estas condiciones, el PC puede fracasar.

Ahora, ¿cómo se sostiene todo esto en el Argumento Ontológico? Recordemos que el caso del PC invocado ahí es $\gamma P_1 \wedge \ldots \wedge \gamma P_n$, donde γ es la descripción $\iota x(xP_1 \wedge \ldots \wedge xP_n)$. O ahí hay algo que satisface $xP_1 \wedge \ldots \wedge xP_n$, o no lo hay. Si lo hay, debe ser único. (No puede haber dos objetos omnipotentes: si yo soy omnipotente, puedo evitar que tú hagas cosas, así que tú no puedes serlo.) Así que γ se refiere a esto, y $\gamma P_1 \wedge \ldots \wedge \gamma P_n$ es verdadero. Si no lo es, entonces γ se refiere a nada; así que cada conjunto de $\gamma P_1 \wedge \ldots \wedge \gamma P_n$ es falso; como, por lo tanto, es toda la conjunción. En otras palabras, el caso del PC usado en el argumento es lo suficientemente verdadero si Dios existe; pero es falso si Dios no existe. Así que si estamos discutiendo sobre la existencia de Dios, no podemos invocar simplemente este caso del PC: eso sólo sería *asumir* lo que supuestamente estamos probando. Los filósofos dicen que semejante argumento *es una petición de principio*; esto es, da por garantizado exactamente lo que está en cuestión. Y es claro que un argumento así no funciona.

Ya es suficiente para el Argumento Ontológico. Terminemos el capítulo viendo que el recuento de descripciones que he explicado es en sí mismo problemático de un modo. De acuerdo con él, si δP es una oración donde δ es una descripción que no se refiere a algo, es falso. Pero esto no siempre parece correcto. Por ejemplo, parece que el más poderoso de los antiguos dioses griegos fue llamado "Zeus", vivió en el Monte Olimpo, fue adorado

por los griegos, etcétera. Pero en realidad no había antiguos dioses griegos. De hecho, ellos no existieron. Si esto es correcto, entonces la descripción "el más poderoso de los antiguos dioses griegos" no se refiere a algo. Pero en ese caso, son oraciones verdaderas de sujeto/predicado en la que el término del sujeto fracasa en la tarea de referirse a cualquier cosa, como a "el más poderoso de los antiguos dioses griegos fue adorado por los griegos". Para ponerlo de manera tendenciosa, después de todo hay verdades sobre objetos que no existen.

Idea principal del capítulo

- $\iota x c_x P$ es verdadero en una situación sólo si, en esa situación, hay un objeto único, a, que satisface c_x, y aP.

5. AUTORREFERENCIALIDAD: ¿DE QUÉ TRATA ESTE CAPÍTULO?

Cuando uno piensa en casos normales con frecuencia las cosas parecen simples; pero esto puede ser engañoso. Al considerar casos más infrecuentes, la simplicidad puede desaparecer. Así pasa con la referencia. En el capítulo anterior vimos que las cosas no son tan sencillas como se podría suponer, una vez que tomamos en cuenta que algunos nombres pueden no referirse a algo. Surgen nuevas complicaciones cuando consideramos otro tipo de caso inusual: la autorreferencia.

Es muy posible que un nombre se refiera a algo de lo que él mismo es parte. Por ejemplo, consideremos la oración "Esta oración tiene cinco palabras". El nombre que es el sujeto de la oración, "esta oración", se refiere a toda la oración, de la que ese nombre forma parte. Cosas similares suceden en un conjunto de regulaciones que contienen la cláusula "Estas regulaciones podrían ser revisadas por una decisión mayoritaria del Departamento de Filosofía". O por una persona que piensa "Si estoy pensando este pensamiento, entonces debo estar consciente".

Todos estos son casos de auto-referencia relativamente sin problemas. Hay otros casos muy diferentes. Por ejemplo, supongamos que alguien dice:

Esta oración que estoy pronunciando ahora es falsa.

Llamemos a esta oración λ. ¿Es λ verdadera o falsa? Bueno, si es verdadera, entonces lo que dice es el caso, así que λ es falsa. Pero si es falsa, entonces, ya que esto es exactamente lo que afirma, es verdadera. En ambos casos, λ parece ser verdadera y falsa. La oración es como una cinta de Moebius, una configuración topológica donde, debido a un giro, el interior es el exterior, y el exterior es el interior: la verdad es falsedad y la falsedad es verdad.

O supongamos que alguien dice:

Esta oración que estoy pronunciando ahora es verdadera.

¿Es verdadera o falsa? Bueno, si es verdadera, es verdadera, ya que eso es lo que dice. Y si es falsa, entonces es falsa, ya que dice que es verdadera. Por lo tanto, tanto la suposición de que es verdadera como la de que es falsa parecen ser consistentes. Además, parece no haber ningún otro hecho que resuelva el tema del valor de verdad que tiene. No sólo es que tenga algún valor que nosotros no conocemos o, incluso, no podemos conocer. En vez de eso, parecería que no habría nada que lo determine como falso o verdadero. Parecer que no es ni verdadero ni falso.

Estas paradojas son muy antiguas, la primera de ellas parece haber sido descubierta por el filósofo griego Eubúlides, y con frecuencia se le llama la *paradoja del mentiroso.* Hay muchas más, y más recientes, paradojas del mismo tipo, algunas de las cuales desempeñan un papel crucial en partes centrales del razonamiento matemático. Aquí hay otro ejemplo. Un conjunto es una colección de objetos. Así, por ejemplo, uno podría tener el conjunto de todas las personas, el de todos los números, el de todas las ideas abstractas. Los conjuntos pueden ser miembros de otros conjuntos. Entonces, por ejemplo, el conjunto de todas las personas de una habitación es un conjunto, y por lo tanto pertenece al conjunto de todos los conjuntos. Algunos conjuntos pueden incluso ser miembros de sí mismos: el conjunto de todos los objetos mencionados en esta página es un objeto mencionado en esta página (lo acabo de mencionar) y, por lo tanto, un miembro de sí mismo. Y algunos conjuntos desde luego no son miembros de sí mismos: el conjunto de toda la gente no es una persona y, por lo tanto, no es un miembro del conjunto de toda la gente.

Ahora, consideremos el conjunto de todos esos conjuntos que no pertenecen a sí mismos. Llamemos a esto *R*. ¿Es *R* un miembro de sí mismo o no lo es? Si es un miembro de sí mismo, es una de las cosas que no es un miembro de sí mismo y, por lo tanto, no es un miembro de sí mismo; es uno de esos conjuntos que no son miembros de ellos mismos y, por lo tanto, *es* miembro de sí mismo. Parecería que *R*, es y no es miembro de sí mismo.

Esta paradoja fue descubierta por Bertrand Russell, a quien conocimos en el capítulo anterior, y por eso se llama *paradoja de Russell.* Como la paradoja del mentiroso, tiene una contraparte. ¿Qué hay del conjunto de todos los conjuntos que *son* miembros de ellos mismos? ¿Es éste un miembro de sí mismo o no? Bueno, si lo es, lo es y si no lo es, no. De nuevo, parecería que no hay algo que determine la situación de una forma u otra.

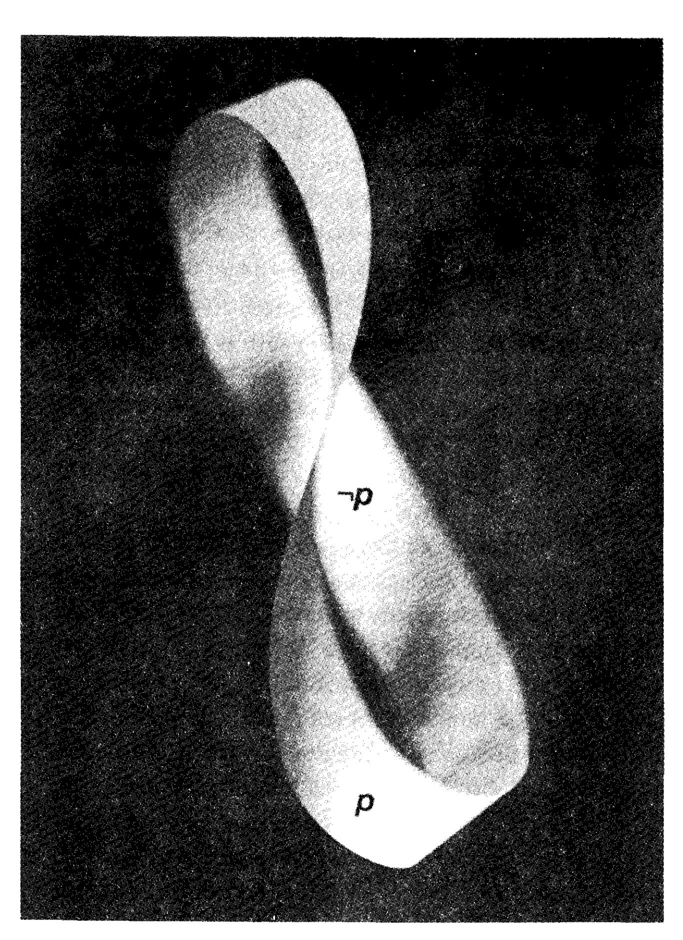


Figura 5. Una cinta de Moebius. Adentro es afuera y afuera es adentro. La verdad es falsedad y la falsedad verdad.

Los ejemplos de este tipo desafían la suposición que hicimos en el capítulo 2 que cada oración es verdadera o falsa, pero no verdadera y falsa. "Esta oración es falsa", y "*R* no es un miembro de sí mismo" parece ser tanto verdadero como falso; y sus contrapartes parecen no ser ni verdaderas ni falsas.

¿Cómo puede acomodarse esta idea? Simplemente al tomar en cuanta esas otras posibilidades. Asumamos que en cualquier situación, cada oración es verdadera pero no falsa, falsa pero no verdadera, tanto falsa como verdadera o ni falsa ni verdadera. Recordemos, del capítulo 2, que las condiciones de verdad para la negación, conjunción y disyunción son las siguientes. En cualquier situación:

$\sim a$ tiene el valor *V* sólo si *a* tiene el valor *F*.
a tiene el valor *F* sólo si *a* tiene el valor *V*.

$a \wedge b$ tiene el valor *V* sólo si tanto *a* como *b* tienen el valor *V*.
$a \wedge b$ tiene el valor *F* sólo si al menos una de *a* y *b* tiene el valor *F*.
$a \vee b$ tiene el valor *V* sólo si al menos una de *a* y *b* tiene el valor *V*.
$a \vee b$ tiene el valor *F* sólo si tanto *a* como *b* tienen el valor *F*.

Usando esta información, es fácil resolver los valores de verdad de oraciones bajo el nuevo régimen. Por ejemplo:

- Supongamos que *a* es *F* pero no *V*. Entonces, ya que *a* es *F*, $\sim a$ es *V* (según la primera cláusula de la ne-

gación). Y ya que a no es V, $\sim a$ no es F (según la segunda cláusula de la negación). Entonces, $\sim a$ es V pero no F.

- Supongamos que a es V y F, y que b sólo es V. Entonces tanto a como b son V, así que $a \wedge b$ es V (según la primera cláusula de la conjunción). Pero, como a es F, al menos una de a y b es F, así que $a \wedge b$ es F (según la segunda cláusula de la conjunción). Así que $a \wedge b$ es tanto V como F.
- Supongamos que a es sólo V, y b no es no V ni F. Entonces ya que a es V, al menos uno de a y b es V, y por lo tanto $a \vee b$ es V (según la primera cláusula de la disyunción). Pero como a no es F, entonces no es el caso de que a y b sean ambos F. Así que $a \vee b$ no es F (según la segunda cláusula de la disyunción). Por lo tanto, $a \vee b$ es sólo V.

¿Qué nos dice esto sobre la validez? Un argumento válido es todavía uno donde no hay situación en que las premisas sean verdaderas, y la conclusión no lo sea. Y una situación aún es algo que tiene un valor de verdad para cada proposición. Sólo ahora, la situación podría dar a una oración un valor de verdad, dos, o ninguno. Así que consideremos la inferencia $q/q \wedge p$. En cualquier situación donde q tiene el valor V, las condiciones para $\vee$ nos aseguran que $q \vee p$ también tiene el valor V. (También podría tener el valor F, pero no importa.) Entonces, si la premisa tiene el valor V, también lo tiene la conclusión. La inferencia es válida.

En este punto, vale la pena regresar a la inferencia con la que empezamos en el capítulo 2: q, $\sim q/p$. Como vimos en ese capítulo, dadas las suposiciones hechas ahí, esta inferencia es válida. Pero dadas las nuevas suposiciones, las cosas son diferentes. Para ver por qué, tomemos una situación donde q tiene los valores V y F, pero p sólo tiene el valor F. Ya que q es tanto V como F, $\sim q$ es también V y F. Entonces las dos premisas son V (y F también, pero eso no es relevante), y la conclusión, p, no es V. Esto nos da otro diagnóstico de por qué encontramos la inferencia intuitivamente inválida. *Es* inválida.

Ése no es el final de la situación, sin embargo. Como vimos en el capítulo 2, esta inferencia resulta de otras dos inferencias. En la presente relación acabamos de ver que $(q/q \vee p)$ es válida. Por lo tanto la otra debe ser inválida; y lo es. La otra inferencia es:

$$\frac{q \vee p, \sim q}{p}$$

Ahora consideremos una situación donde q adquiere los valores V y F, y p obtiene sólo el valor F. Es bastante sencillo revisar que ambas premisas tengan el valor V (igual que el F). Pero la conclusión no da el valor V. Por lo tanto, la inferencia es inválida.

En el capítulo 2, dije que esta inferencia parece intuitivamente válida. Así, dada la nueva cuenta, nuestras intuiciones sobre esto deben estar equivocadas. Uno puede ofrecer una explicación de este hecho, sin embargo. La inferencia parece ser válida porque, si $\sim q$ es verdadero, esto parece regir la verdad de q, dejándonos con p. Pero en la presente exposición, la verdad de $\sim q$ no rige la de q. Lo haría sólo si algo no pudiera ser verdadero y falso. Cuando pensamos que la inferencia es válida, quizá es-

tamos olvidando esas posibilidades, que pueden surgir en casos poco comunes como los autorreferentes.

¿Cuál explicación es mejor? ¿Aquella con la que terminamos el capítulo 2, o la que tenemos ahora? Los dejo pensando en esa cuestión. Terminemos, mejor, como siempre, desafiando un poco las ideas sobre las que descansa la nueva explicación. Consideremos la paradoja del mentiroso y su contraparte. Tomemos primero a la última. La oración "esta oración es verdadera" supuestamente fue un ejemplo de algo que no es ni verdadero ni falso. Supongamos que esto es así. Entonces, en particular, esto no es verdad. Pero, por sí misma, dice que eso *es* verdad. Así que debe ser falsa, contraria a nuestra suposición de que no es ni falsa ni verdadera. Parece que hemos terminado en una contradicción. O tomemos la oración que miente, "Esta oración es falsa". Fue supuestamente un ejemplo de una oración que es tanto verdadera como falsa. Torzámosla un poco. Consideremos, en su lugar, la oración "Esta oración no es verdadera". ¿Cuál es el valor de verdad de esto? Si es verdadera, entonces lo que dice es el caso; así que no es verdadera. Pero si no es verdadera, entonces, como eso es lo que dice, es verdadera. De cualquier forma, parece ser verdadera y no verdadera. De nuevo, tenemos una contradicción en nuestras manos. No es sólo que una oración pueda tomar los valores V y F; en vez de eso, una propocisión puede ser y no ser V.

Las situaciones de este tipo han hecho la auto-referencia muy controversial, ya desde Eubúlides. Es, ciertamente, un asunto muy enredado.

Principal idea del capítulo

- Las oraciones pueden ser verdaderas, falsas, verdaderas y falsas, o ni verdaderas ni falsas.

6. NECESIDAD Y POSIBILIDAD: ¿LO QUE SERÁ DEBE SER?

Con frecuencia afirmamos no sólo que algo *es*, sino que *debe ser*. Decimos: "Debe llover", "No puede ser que no llueva", "Necesariamente va a llover". También tenemos muchas formas de decirlo, aunque algo no pueda, de hecho, ser el caso, *podría* ser. Decimos: "podría llover mañana", "es posible que mañana llueva", "no es imposible que llueva mañana". Si *a* es cualquier oración, los lógicos usualmente escriben la afirmación de que *a* debe ser cierto como $\Box a$, y la declaración de que *a* podría ser verdadero como $\Diamond a$.

$\Box$ y $\Diamond$ son llamados *operadores modales*, ya que expresan los modos en que las cosas son verdaderas o falsas (necesariamente, posiblemente). Los dos operadores están, de hecho, conectados. Decir que algo debe ser el caso es decir que no es posible para eso no ser el caso. Eso es, $\Box a$ significa lo mismo que $\sim\Diamond\sim a$. De forma semejante, decir que es posible que algo sea el caso es decir que no es necesariamente el caso de que eso sea falso. Eso es, $\Diamond a$ significa lo mismo que $\sim\Box\sim a$. Para una buena medida, podemos expresar el hecho de que es imposible que *a* sea verdadero, indiferentemente, como $\sim\Diamond a$ (no es posible que *a*), o para $\Box\sim a$ (*a* es necesariamente falso).

A diferencia de los operadores que hemos encontrado hasta ahora, $\Box$ y $\Diamond$ no son funciones de verdad. Como vimos en el capítulo 2, cuando conocemos el valor de verdad de a, es posible resolver el valor de verdad de $\sim a$. De igual forma, cuando conocemos los valores de verdad de a y b, puedes resolver los valores de verdad de $a \vee b$ y $a \wedge b$. Pero no podemos inferir el valor de verdad de $\Diamond a$ simplemente del conocimiento del valor de verdad de a. Por ejemplo, dejemos que r sea la oración "Mañana me levantaré antes de las 7 a. m.". r es, de hecho, falso. Pero ciertamente podría ser verdadera: Podría programar mi despertador y levantarme temprano. Por lo tanto, $\Diamond r$ es verdadera. Por contraste, dejemos que j sea la oración "Saltaré fuera de la cama y levitaré 2 m sobre el suelo". Como r, esto también es falso. Pero a diferencia de r, ni siquiera es posible que sea verdadero. Eso violaría las leyes de gravedad. Por lo tanto, $\Diamond j$ es falso. Así que el valor de verdad de una oración, a, no determina que $\Diamond a$: r y j son falsos ambos, pero $\Diamond r$ es verdadero y $\Diamond j$ es falso. De la misma manera, el valor de verdad de a no determina el valor de verdad de $\Box a$. Dejemos ahora que r sea la oración "Mañana me levantaré antes de las 8 a.m.". Esto, de hecho, es verdadero; pero no es necesariamente verdadero. Podría quedarme en la cama. Dejemos que j ahora sea la oración "Si salto de la cama mañana en la mañana, me habré movido". Eso también es verdadero, pero no hay manera de que *eso* pudiera ser falso. Es necesariamente verdadero. Por lo tanto, r y j son ambas verdadero, pero una es necesariamente verdadera, y la otra no.

Los operadores modales son, por lo tanto, operadores de un tipo muy diferente de lo que hemos encontrado hasta ahora. También son operadores importantes y con frecuencia intrigantes. Para ilustrarlo, aquí hay un argumento para el fatalismo, creado por el otro de los dos filósofos griegos más influyentes de la antigüedad, Aristóteles.

El fatalismo es la visión de que cualquier cosa que sucede *tiene que* suceder: no hubiera podido evitarse. Cuando ocurre un accidente, o una persona muere, no hay nada que hubiera podido hacerse para evitarlo. El fatalismo es una visión que ha atraído a algunos. Cuando algo va mal, hay cierto grado de consuelo derivado de la idea de que no hubiera podido ser de otra manera. Sin embargo, el fatalismo supone que estoy imposibilitado para alterar lo que sucede, y esto parece simplemente falso. Si hoy me veo involucrado en un accidente de tráfico, pude haberlo evitado con sólo haber tomado otro camino. ¿Entonces cuál es el argumento de Aristóteles? Avanza de esta forma. (Por ahora, ignoremos las letras en negritas; luego regresaremos a ellas.)

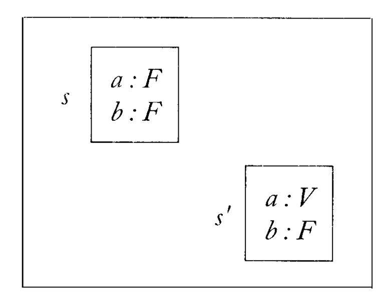
Tomemos cualquier afirmación; digamos, para ilustrar el ejemplo, que mañana me veré involucrado en un accidente de tráfico. Ahora, podríamos no saber aún si esto es verdadero, pero sabemos que o me veré involucrado en un accidente o no. Supongamos lo primero. Y **si es verdad decir que me veré involucrado en un accidente entonces no puede fallar que sea el caso de verme involucrado**. Eso es, debe ser el caso de que me vea involucrado. Supongamos, por otro lado, que de hecho mañana no me veré involucrado en un accidente de tráfico. Entonces es verdadero decir que no me veré involucrado en un accidente; y si esto es así, no puede fallar que sea el caso de no estar en un accidente. Cualquiera de estas



Figura 6. Aristóteles (384-322 a.C.), el fundador de la lógica formal.

dos cosas que *suceda*, entonces, *tiene que* suceder. Esto es el fatalismo.

¿Qué puede uno decir sobre esto? Para responder, echemos un vistazo a la moderna comprensión estándar de los operadores modales. Suponemos que cada situación, *s*, viene acompañada de un montón de posibilidades, esto es, situaciones que son tan posibles hasta donde llega *s* de ser definitivas; digamos, situaciones que pueden surgir sin violar las leyes de la física. Por lo tanto, si *s* es la situación en la que ahora me encuentro (estar en Australia), mi estadía en Londres dentro de una semana es una situación posible; mientras que mi estadía en Alfa Centauri (a más de cuatro años luz de distancia) no lo es. De acuerdo con el filósofo y lógico del siglo XVII, Leibniz, los lógicos llaman con frecuencia a estas situaciones posibles, de manera muy colorida, *mundos posibles*. Ahora, decir que $\Diamond a$ (es posible el caso de que *a*) es verdadero en *s*, es decir, que *a* es de hecho verdadero en *al menos uno* de los mundos posibles asociados con *s*. Y decir que $\Box a$ (es necesariamente el caso de que *a*) es verdadero en *s*, es como decir que *a* es verdadero en *todos* los mundos posibles asociados con *s*. Esto es porqué $\Box$ y $\Diamond$ no son funciones de verdad. Porque *a* y *b* podrían tener el mismo valor de verdad en *s*, digamos *F*, pero podrían tener diferentes valores verdaderos en los mundos asociados con *s*. Por ejemplo, *a* podría ser cierto en uno de ellos (digamos, s"), pero *b* podría ser cierto en ninguno de ellos como esto:



Este reporte nos da una forma de analizar inferencias empleando operadores modales. Por ejemplo, consideremos la inferencia:

$$\frac{\Diamond a \qquad \Diamond b}{\Diamond\, (a \wedge b)}$$

Esto no es válido. Para ver por qué, supongamos que las situaciones asociadas con s son s_1 y s_2, y que los valores verdaderos son como sigue:

s

a : F
b : F

s_1 a : V b : F

a : F b : V s_2

a es V en s_1; por lo tanto, $\Diamond a$ es verdadero en s. De forma similar, b es verdadero en s_2; por lo tanto, $\Diamond b$ es verdadero en s. Pero $a \wedge b$ no es verdadero en ningún mundo asociado; por lo tanto, $\Diamond(a \wedge b)$ no es verdadero en s.

Por contraste, la siguiente inferencia es válida;

$$\frac{\Box a \qquad \Box b}{\Box(a \wedge b)}$$

Porque si las premisas son verdaderas en una situación s, entonces a y b son verdaderas en todos los mundos asociados con s. Pero entonces $a \wedge b$ es verdadera en todos esos mundos. Eso es, $\Box(a \wedge b)$ es verdadera en s.

Antes de que podamos regresar a la pregunta de cómo se apoya esto en el argumento de Aristóteles, necesitamos hablar brevemente sobre otro operador lógico que aún no conocemos. Escribamos "si a entonces b" como $a \rightarrow b$. Las oraciones con esta forma se llaman *condicionales*, y nos interesarán mucho en el siguiente capítulo. Todo lo que debemos notar en el presente es que la mayor inferencia donde parecen estar involucrados los condicionales es ésta:

$$\frac{a \quad a \rightarrow b}{b}$$

(Por ejemplo: "Si ella hace ejercicio con regularidad entonces está en forma. Ella hace ejercicio con regularidad; entonces está en forma".) Los lógicos modernos usualmente llaman a esta inferencia por el nombre que le die-

ron los lógicos medievales: *modus ponens*. Literalmente, esto significa "el método de proponer". (No pregunten.)

Ahora, para el argumento de Aristóteles, necesitamos pensar un poco sobre condicionales de la forma:

Si *a* entonces no puede dejar de ser el caso que *b*.

Semejantes oraciones son, de hecho, ambiguas. Pueden significar es que si *a*, de hecho, es verdadera, entonces *b* necesariamente lo es. Esto es, si *a* es verdadera en la situación de la que estamos hablando, *s*, entonces *b* es verdadera en todas las posibles situaciones asociadas con *s*. Podemos escribir esto como $a \rightarrow \Box b$. La oración parece usarse de esta forma cuando decimos cosas como: "No puedes cambiar el pasado. Si algo es verdadero del pasado, entonces no puede dejar de ser verdadero. No hay nada que puedas hacer para cambiarlo de otro modo: es irrevocable".

El segundo significado de un condicional de la forma "si *a* entonces no puede dejar de ser el caso que *b*", es muy diferente. Con frecuencia usamos esta combinación de palabras para expresar el hecho de que *b* se sigue de *a*. Estaríamos usando la oración de esta forma si dijéramos algo como: "si Pedro va a divorciarse entonces no puede dejar de estar casado". No estamos diciendo que si Pedro va a divorciarse, su matrimonio es irrevocable. Estamos diciendo que no es posible obtener un divorcio a menos que estemos casados. No hay ninguna situación posible en la que tenga más una casa, pero no la otra. Eso es, en cualquier situación posible, si una es verdadera entonces lo es la otra. Esto es, $\Box(a \rightarrow b)$ es verdadero.

Ahora, $a \rightarrow \Box b$ y $\Box(a \rightarrow b)$ significan cosas muy diferentes. Y desde luego, la primera no resulta de la segunda. El simple hecho de que $a \rightarrow b$ es verdadera en toda situación asociada con *s*, no significa que $a \rightarrow \Box b$ sea verdadera en *s*. *a* podría ser verdadera en *s*, mientras que $\Box b$ no: tanto *b* como *a* podrían dejar de ser verdaderas en algún mundo asociado. O, para dar un contra-ejemplo concreto: es necesariamente verdadero que si Juan se está divorciando, esté casado; pero no es verdadero que si Juan se está divorciando está necesaria (e irrevocablemente) casado.

Para regresar al fin al argumento de Aristóteles, consideremos la oración que escribimos en negritas: "Si es verdad decir que me veré involucrado en un accidente entonces no puede dejar de ser el caso de que me veré involucrado". Esto es exactamente de la forma de la que hemos estado hablando. Es, por lo tanto, ambigua. Es más, el argumento negocia con esta ambigüedad. Si *a* es la oración "Es verdad decir que estaré involucrado en un accidente de tráfico", y *b* es la oración "Estaré involucrado (en un accidente de tráfico)", entonces la condicional en negritas es verdadero en el sentido:

1. $\Box(a \rightarrow b)$

Necesariamente, si es verdad decir algo, entonces ese algo es el caso. Pero lo que necesita establecerse es:

2. $a \rightarrow \Box b$

Después de todo, el siguiente paso del argumento es precisamente inferir $\Box b$ de *a* por *modus ponens*. Pero como hemos visto, 2 no se sigue del todo de 1. Por lo tan-

to, el argumento de Aristóteles es inválido. En buena medida, exactamente el mismo problema surge en la segunda parte del argumento, con el condicional "Si es verdad decir que no estaré involucrado en un accidente de tráfico no puede dejar de ser el caso de que no estaré involucrado en un accidente".

Ésta parece una respuesta satisfactoria al argumento de Aristóteles. Pero hay un argumento muy relacionado que no puede responderse tan fácilmente. Regresemos al ejemplo que tenemos sobre modificar el pasado. Parece ser verdadero que si alguna afirmación sobre el pasado es verdadera, ahora es necesariamente verdadera. Es imposible, ahora, volverla falsa. La batalla de Hastings se llevó a cabo en 1066, y ahora no hay nada que uno pueda hacer para que se haya llevado a cabo en 1067. Por lo tanto, si p es alguna afirmación sobre el pasado, $p \rightarrow \Box p$.

Ahora consideremos alguna declaración sobre el futuro. De nuevo, por ejemplo, dejemos que sea la afirmación de que mañana estaré involucrado en un accidente de tráfico. Supongamos que esto es verdadero. Entonces si alguien pronunció esta frase hace 100 años, habló con la verdad. E incluso si nadie de hecho la pronunció, si alguien lo hubiera hecho, habría hablado con la verdad. Por lo tanto, el que mañana estaré involucrado en un accidente de tráfico fue verdadero hace 100 años. Esta declaración (p) es desde luego una declaración sobre el pasado y, por lo tanto, ya que es verdadera, es necesariamente verdadera ($\Box p$). Entonces debe ser necesariamente verdadero que mañana estaré involucrado en un accidente de tráfico. Pero eso fue sólo un ejemplo; el mismo razonamiento podría aplicarse a cualquier cosa. Entonces, cualquier cosa que sucede, tiene que suceder. Este argumento para el fatalismo no comete la misma falacia (eso es, usa el mismo argumento inválido) que la primera que di. ¿Es el fatalismo verdadero después de todo?

Ideas principales del capítulo

- Cada situación viene con una colección de situaciones posibles asociadas.
- $\Box a$ es verdadera en una situación, s, si a es verdadera en cada situación asociada con s.
- $\Diamond a$ es verdadera en una situación, s, si a es verdadera en alguna situación asociada con s.

7. CONDICIONALES: ¿QUÉ HAY EN UN *SI*?

En este capítulo regresaremos al operador lógico que introduje de paso en el capítulo anterior, el condicional. Recordemos que una oración condicional es de la forma "si *a* entonces *c*", que estamos escribiendo como $a \rightarrow c$. Los lógicos llaman a *a* el *antecedente* de la condicional y a *c* el *consecuente*. También notamos que una de las inferencias básicas de la condicional es el *modus ponens*: $a, a \rightarrow c / c$. Los condicionales son fundamentales para gran parte de nuestro razonamiento. El capítulo anterior sólo mostró un ejemplo de ello. Aún así son profundamente desconcertantes. Han sido estudiados en la lógica desde los tiempos más tempranos. De hecho, un antiguo comentarista (Calímaco) reportó en una ocasión que hasta los cuervos de los tejados estaban graznando sobre los condicionales.

Veamos por qué —o, al menos, una razón por la cual— los condicionales son desconcertantes. Si sabemos que $a \rightarrow c$, parece que podemos inferir que $\sim(a \wedge \sim c)$ (no es el caso de que *a* y no *c*). Supongamos, por ejemplo, que alguien nos informa que si perdemos el autobús, estaremos retrasados. Podemos inferir de ello que es falso que perderemos el autobús y no estaremos retrasados. Al contrario, si sabemos que $\sim(a \wedge \sim c)$, parece que podemos in-

ferir de esto que $a \rightarrow c$. Supongamos, por ejemplo, que alguien nos dice que no iremos al cine sin gastar dinero (no es el caso que vayamos al cine y no gastemos dinero). Podemos inferir que si vamos al cine, gastaremos dinero. $\sim(a \wedge \sim c)$ con frecuencia se escribe como $a \supset c$, y se llama *condicional material*. Entonces, parecería que $a \rightarrow c$ y $a \supset c$ significan la misma cosa. En particular, asumiendo la maquinaria del capítulo 2, deberán tener la misma tabla de verdad. Es un ejercicio simple, que incluyo aquí, para mostrar que es como sigue:

a	c	$a \supset c$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Pero esto es extraño. Significa que si c es verdadera en una situación (primer y tercer renglón), entonces es $a \rightarrow c$. Esto con dificultad parece correcto. Es verdadero, por ejemplo, que Canberra sea la capital federal de Australia, pero la condicional "si Canberra no es la capital federal de Australia, Canberra es la capital federal de Australia" parece simplemente falsa. Similarmente, la tabla de verdad nos muestra que si a es falsa (tercer y cuarto renglón), $a \rightarrow c$. Pero esto también difícilmente parece correcto. La condicional "si Sydney es la capital federal de Australia, entonces Brisbane es la capital federal" también parece del todo falsa. ¿Qué ha salido mal?

Lo que parecen mostrar estos ejemplos es que $\rightarrow$ no es una función de verdad: el valor de verdad de $a \rightarrow c$ no

está determinado por los valores de verdad de a y c. Tanto "Roma está en Francia" como "Beijing está en Francia" son falsas; pero es verdad que:

Si Italia es parte de Francia, Roma está en Francia.

Mientras que es falso:

Si Italia es parte de Francia, Beijing está en Francia.

Así que ¿cómo funcionan los condicionales?

Puede darse una respuesta usando el mecanismo de mundos posibles del capítulo anterior. Consideremos las dos últimas condicionales. En cualquier situación posible en la que Italia haya sido incorporada a Francia, Roma ciertamente hubiera estado en Francia. Sin embargo, hay situaciones posibles en las que Italia fue incorporada a Francia, pero eso no tiene efecto en China para nada. Así que Beijing aún no estaba en Francia. Esto sugiere que la condicional $a \rightarrow c$ es verdadera en alguna situación, s, sólo si c es verdadera en cada una de las posibles situaciones asociadas con s en las que a es verdadera; y es falsa en s si c es falsa en alguna posible situación asociada con s en la que a es verdadera.

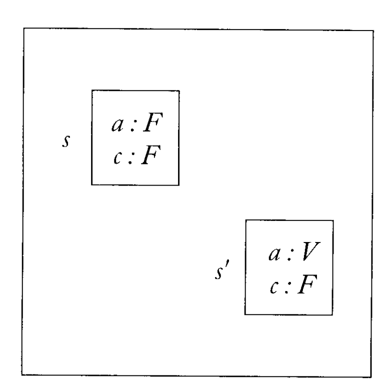
Esto da cuenta de $\rightarrow$ de manera plausible. Por ejemplo, muestra por qué el *modus ponens* es válido —al menos en una suposición. La suposición es que contamos a s como una de las posibles situaciones asociadas con s. Esto parece razonable: cualquier cosa que es *en realidad* el caso en s seguramente es *posible*. Ahora, supongamos que a y $a \rightarrow c$ son verdaderas en algunas situaciones asociadas con s. Entonces c es verdadera en todas las situaciones asocia-

das con s en las que a es verdadera. Pero s es una de esas situaciones, y a es verdadera en ella. Por lo tanto, también es c, como se requiere.

Regresando al argumento con el que empezamos, ahora podemos ver dónde falla. La inferencia de la que depende el argumento es:

$$\frac{\sim(a \vee \sim c)}{a \rightarrow c}$$

Y esto no es válido. Por ejemplo, si a es F en alguna situación, s, esto basta para hacer la premisa verdadera en s. Pero no nos dice nada sobre cómo se comportan a y c en las posibles situaciones asociadas con s. Bien podría ser que en una de esas, digamos s', a sea verdadera y c no, como aquí:



Así que $a \rightarrow c$ no es verdadera en s.

¿Qué hay sobre el ejemplo que teníamos antes, donde se informa que no iremos al cine sin gastar dinero?

¿No parece válida la inferencia en este caso? Supongamos que sabemos que no iremos al cine sin gastar dinero: $\sim(g \wedge \sim m)$. ¿En realidad podemos concluir que si vamos al cine gastaremos dinero: $g \rightarrow m$? No necesariamente. Supongamos que no iremos al cine, incluso si la entrada es gratis esa noche. (Hay un programa en la televisión mucho más interesante.) Entonces sabemos que no es verdad que iremos ($\sim g$), y por lo tanto que no es verdad que iremos y no gastaremos dinero: $\sim(g \wedge \sim m)$. ¿Entonces podemos inferir que si vamos gastaremos dinero? En realidad no: podría ser una noche gratis.

Es importante notar que en la situación donde aprendiste que la premisa es verdadera al ser informado de ello, otros factores operan, por lo común. Cuando alguien nos dice algo como $\sim(g \wedge \sim m)$, normalmente no lo hace sobre la base de que sabe que $\sim g$ es verdadera. (Si supiera eso, en general no tendría sentido que nos dijera mucho sobre la situación.) Si nos dicen eso, es sobre la base de que hay alguna conexión entre g y m: de que no podemos tener a g como verdadera sin que m lo sea —y esto es exactamente lo que toma el condicional para ser verdadero. Así que en el caso donde se nos informa la premisa, normalmente es razonable inferir que $g \rightarrow m$; pero no a partir del contenido de lo que fue dicho, sino del hecho *de haber sido dicho.*

De hecho, con frecuencia hacemos correctamente inferencias de este tipo sin pensar. Supongamos, por ejemplo que le pregunto a alguien cómo logro que mi computadora haga alguna cosa u otra, y me responde "Hay un manual sobre la repisa". Infiero que es un manual de computadora. Esto no se sigue de lo que realmente se dijo, pero la aclaración no hubiera sido relevante a me-



Figura 7. Saltando a las conclusiones.

nos que el manual sea un manual de computadoras, y las personas normalmente buscan decir lo relevante. Por lo tanto, puedo concluir que es un manual de computadoras por el hecho de que dijo lo que dijo. La inferencia no es una inferencia deductiva. Después de todo, la persona pudo haber dicho esto, y no ser un manual de computadoras. Pero la inferencia es aún una excelente inferencia inductiva. Es de un tipo llamado con frecuencia *implicación conversacional.*

La condicional que hemos estado viendo parece decir adiós, por lo menos hasta donde hemos visto. Enfrenta, sin embargo, varios problemas. Aquí hay uno. Consideremos las siguientes inferencias:

Si vamos a Roma estamos en Italia.
Si estamos en Italia, estamos en Europa.
Por lo tanto, si vamos a Roma, estaremos en Europa.

Si x es mayor que 10 entonces x es mayor que 5.
Por lo tanto, si x es mayor que 10 y menor que 100, entonces x es mayor que 5.

Estas inferencias parecen perfectamente válidas, y lo son. Podemos escribir la primera inferencia como:

1. $$\frac{a \rightarrow b \qquad b \rightarrow c}{a \rightarrow c}$$

Para ver que esto resulta válido, supongamos que las premisas son verdaderas en alguna situación, s. Entonces b es verdadera en toda situación posible asociada con s donde a es verdadera; y en forma similar, c es verdadera en toda situación asociada donde b lo es. Así que c es verdadera en cualquier situación donde a es verdadera. Esto es, $a \rightarrow c$ es verdadera en s.

Podemos escribir la segunda inferencia como:

2. $$\frac{a \rightarrow c}{(a \wedge b) \rightarrow c}$$

Para ver que esto resulta válido, supongamos que la premisa es verdadera en alguna situación, *s*. Entonces *c* es verdadera en cada posible situación asociada con *s* donde *a* es verdadera. Ahora, supongamos que $a \wedge b$ es verdadera en una situación asociada; entonces *a* es desde luego verdadera en esa situación, y por lo tanto *c* lo es. Por lo tanto, $(a \wedge b) \rightarrow c$ es verdadera en *s*.

Hasta aquí vamos bien. El problema es que hay inferencias que son exactamente de esta forma, pero parecen ser *inválidas*. Por ejemplo, supongamos que hay una elección para primer ministro con sólo dos candidatos, Smith, la actual primera ministro, y Jones. Ahora consideremos la siguiente inferencia:

> Si Smith muere antes de la elección, Jones ganará. Si Jones gana la elección, Smith se retirará y tomará su pensión. Por lo tanto, si Smith muere antes de la elección, ella se retirará y tomará su pensión.

Esta es exactamente una inferencia de la forma 1. Parece claro que podría haber una situación en la que ambas premisas sean verdaderas. Pero no la conclusión; ¡a menos que estemos considerando una situación extraña en la que el gobierno pueda hacer efectivos los pagos de pensión en la otra vida!

O consideremos la siguiente inferencia que concierne al mencionado Smith:

> Si Smith salta de lo alto de un precipicio, morirá debido a la caída. Por lo tanto, si Smith salta de lo alto de un elevado precipicio y lleva un paracaídas, morirá debido a la caída.

Esta es una inferencia de la forma 2. Aún así, de nuevo, parece claro que puede haber situaciones donde la premisa es verdadera y la conclusión no.

¿Qué podríamos decir sobre este estado de cosas? Dejaré que piensen en ello. A pesar del hecho de que los condicionales son centrales en nuestros razonamientos sobre la mayoría de las cosas, aún son una de las áreas más controvertidas de la lógica. Si los pájaros ya no están graznando sobre los condicionales, los lógicos desde luego aún lo hacen.

Principal idea del capítulo

- $a \rightarrow b$ es verdadera en una situación, *s*, sólo si *b* es verdadera en cada situación asociada con *s* donde *a* es verdadera.

8. EL FUTURO Y EL PASADO: ¿ES REAL EL TIEMPO?

El tiempo nos es muy familiar. Planeamos hacer cosas en el futuro; recordamos cosas del pasado; y a veces disfrutamos estar sólo en el presente. Y parte de encontrar nuestro camino en el tiempo es hacer inferencias relacionadas con el tiempo. Por ejemplo, las dos siguientes inferencias son intuitivamente válidas:

Está lloviendo.	Será cierto que siempre ha estado lloviendo.
Habrá estado lloviendo.	Está lloviendo.

Todo esto parece elemental.

Pero en cuanto uno empieza a pensar en el tiempo, uno parece quedar enredado en nudos. Como dijo Agustín, si nadie me pregunta qué es el tiempo, entonces lo sé muy bien; pero cuando alguien me lo pregunta, dejo de saberlo. Una de las cosas más intrigantes sobre el tiempo es que parece fluir. El presente parece moverse: primero es hoy; luego es mañana; y así. ¿Pero cómo puede cambiar el tiempo? El tiempo es lo que mide la velocidad a la que *todo lo demás* cambia. Este problema se encuentra en el corazón de muchos acertijos relacionados con el tiempo.

Uno de ellos fue establecido, a principios del siglo XX, por el filósofo británico John McTaggart Ellis McTaggart. (Es correcto.) Como muchos filósofos, McTaggart estuvo tentado por la visión de que el tiempo es irreal, de que en el último orden de las cosas, es una ilusión.

Para explicar el argumento de McTaggart sobre esto, nos ayuda tener un poco de símbolos. Tomemos una oración en pasado, como "El sol estuvo brillando". Podemos expresar esto de modo equivalente, aunque un poco raro, como "Fue el caso que el sol está brillando". Escribamos "Fue el caso que" como **P** (de "pasado"). Entonces podemos escribir esta oración como "**P** el sol está brillando", o, escribir *s* para "El sol está brillando", simplemente **P***s*. De igual forma, tomemos cualquier oración en futuro, digamos, "El sol estará brillando". Podemos escribir esto como "Será el caso que el sol está brillando". Si escribimos "Será el caso que" como **F** (de "futuro"), entonces podemos escribir esto como **F***s*. (No confundamos esta **F** con la del valor de verdad *F*.)

P y **F** son operadores, como □ y ◊, que se unen a oraciones en general para hacer oraciones completas. Además, como □ y ◊, no son funciones de verdad. "Son las 4 p.m." y "son las 4 p.m. del 2 de agosto de 1999" son ambas verdaderas (en el instante en que las escribí); "*Serán* las 4 p.m." también es verdadero (en el momento presente; pues son las 4 p.m. una vez al día), aunque "*Serán* las 4 p.m. del 2 de agosto de 1999" no lo es. Los lógicos llaman a **P** y a **F** *operadores temporales*. Los operadores temporales pueden ser iterativos o compuestos. Por ejemplo, podemos decir "El sol *habrá estado* brillando", eso es, "Será el caso que fue el caso de que el sol está brillando": **FP***s*. O podemos decir "El sol *ha estado* brillando", eso es, "Fue el caso que fue el caso de que el sol está brillando": **PP***s* (Los operadores modales que encontramos en el capítulo anterior también pueden ser iterativos de esta forma, aunque no consideramos eso ahí.) Podemos llamar a las repeticiones de **P** y **F**, tales como **FP**, **PP**, **FFP**, *tiempos compuestos*.

Ahora, regresemos a McTaggart. McTaggart razonó que no habría tiempo si no hubiera pasado y futuro: éstos son su esencia. Aún así, el pasado y el futuro, alegó, son inherentemente contradictorios; así que en realidad nada puede corresponder a ellos. Bueno, quizá. Pero ¿por qué el pasado y el futuro son contradictorios? Para empezar, el pasado y el futuro son incompatibles. Si algún evento instantáneo es pasado, no es futuro, y viceversa. Dejemos que *e* sea algún evento instantáneo. Puede ser cualquier cosa, pero supongamos que es el paso de la primera bala por el corazón del zar Nicolás en la Revolución rusa. Dejemos que *h* sea la oración "*e* está ocurriendo". Entonces tenemos:

$$\sim(\mathbf{P}h \wedge \mathbf{F}h)$$

Pero *e*, como todos los eventos, es pasado y futuro. Porque el tiempo fluye, todos los eventos tienen la propiedad de ser futuro (antes de que sucedan) *y* la propiedad de ser pasado (después de que suceden):

$$\mathbf{P}h \wedge \mathbf{F}h$$

Así que tenemos una contradicción.

No es probable que este argumento convenza a alguien por mucho tiempo. Un acontecimiento no puede ser pasado y futuro *al mismo tiempo*. El instante en que la bala pasó a través del corazón del zar fue pasado y futuro en *tiempos diferentes*. Comenzó como futuro; se convirtió en presente durante un doloroso instante; y luego fue pasado. Pero ahora —y ésta es la parte más astuta del argumento de McTaggart—, ¿qué estamos diciendo aquí? Estamos aplicando tiempos compuestos a *h*. Estamos diciendo que fue el caso que el evento fue futuro, **PF***h*; luego fue el caso que fue pasado, **PP***h*. Ahora, muchos tiempos compuestos de tiempo, como los tiempos simples, son incompatibles. Por ejemplo, si cualquier evento *será* futuro, no es el caso que *fue* pasado:

$$\sim(\mathbf{PP}h \wedge \mathbf{FF}h)$$

Pero, al igual que con los tiempos simples, el flujo del tiempo es suficiente para asegurar que todos los eventos también tienen todos los tiempos compuestos. En el pasado, **F***h*; como en el pasado lejano **FF***h*. En el futuro, **P***h*; como en el futuro lejano, **PP***h*:

$$\mathbf{PP}h \wedge \mathbf{FF}h$$

Y regresamos a la contradicción.

Quienes quieran ser ingeniosos al respecto, replicarán, igual que antes, que *h* tiene sus tiempos compuestos en diferentes momentos. Fue el caso que **FF***h*; luego, *más tarde*, fue el caso que **PP***h*. Pero ¿qué estamos diciendo aquí? Aplicamos tiempos compuestos más complejos a *h*: **PFF***h* y **PPP***h*; y otra vez podemos usar exactamente el mismo argumento con éstos. Estos tiempos compuestos no son del todo consistentes entre sí, pero el flujo del tiempo asegura que *h* los posee a todos. Quizás hagamos *de nuevo* la misma réplica, pero también está abierta a la misma contrarréplica. Cuando tratamos de salir de la contradicción con un conjunto de tiempos, sólo lo hacemos describiendo cosas en términos de otros tiempos que son igual de contradictorios; así que nunca escapamos de la contradicción. Ése es el argumento de McTaggart.

¿Qué tenemos que decir sobre esto? Para responder, veamos la validez de las inferencias relacionadas con los tiempos. Para dar cuenta de esto, suponemos que cada situación, s_0, viene junto a un montón de otras situaciones; no, en esta ocasión, con las situaciones que representan posibilidades asociadas a s_0 (como con los operadores modales), sino situaciones anteriores a s_0 o posteriores a s_0. Asumiendo, como normalmente lo hacemos, que el tiempo es unidimensional e infinito en ambas direcciones, pasado y futuro, podemos representar las situaciones de una forma familiar:

$$\ldots s_{-3} \quad s_{-2} \quad s_{-1} \quad s_0 \quad s_1 \quad s_2 \quad s_3 \ldots$$

La izquierda es antes; la derecha, después. Como siempre, cada *s* proporciona un valor de verdad, *V* o *F*, para cada oración sin operadores temporales. ¿Qué hay de las oraciones con operadores temporales? Bueno, **P***a* es *V* en cualquier situación, *s*, sólo si *a* es verdadera en alguna situación a la izquierda de *s*; y **F***a* es verdadera en *s* sólo si *a* es verdadera en alguna situación a la derecha de *s*.

Mientras hacemos todo esto, podemos agregar dos nuevos operadores temporales, **G** y **H**. **G** puede leerse

como "Siempre será el caso que ", y **G**a es verdadero en cualquier situación, s, sólo si a es verdadero en *todas* las situaciones a la derecha de s. **H** puede leerse como "Siempre ha sido el caso que", y **H**a es verdadero en cada situación, s, sólo si a es verdadero en todas las situaciones a la izquierda de s. (**G** y **H** corresponden a **F** y **P**, respectivamente, en la misma forma en que □ corresponde a ◊.)

Este mecanismo nos muestra por qué son válidas las dos inferencias con las que empezamos el capítulo. Al emplear operadores temporales, estas inferencias pueden escribirse, respectivamente, como:

$$\frac{r}{\mathbf{FP}r} \qquad \frac{\mathbf{FH}r}{r}$$

La primera inferencia es válida, ya que si r es verdadera en cualquier situación, s_0, entonces en cualquier situación hacia la derecha de s_0, digamos s_1, **P**r es verdadera (ya que s_0 está a su izquierda). Pero entonces, **FP**r es verdadera en s_0, ya que s_1 está a su derecha. Podemos representar las cosas de este modo:

$\ldots s_{-3} \quad s_{-2} \quad s_{-1} \quad s_0 \quad s_1 \quad s_2 \quad s_3 \ldots$

r

Pr

FPr

La segunda inferencia es válida, ya que si **FH**r es verdadera en s_0, entonces en alguna situación a la derecha de s_0, digamos s_2, **H**r es verdadera. Pero entonces en todas las situaciones hacia la izquierda de s_2, y por lo tanto en particular s_0, r es verdadera:

$\ldots s_{-3} \quad s_{-2} \quad s_{-1} \quad s_0 \quad s_1 \quad s_2 \quad s_3 \ldots$

FHr

Hr

$r \quad r \quad r \quad r \quad r$

Además, determinadas combinaciones de tiempos son imposibles, como podríamos esperarlo. Por lo tanto, si h es una oración verdadera en sólo una situación, digamos s_0, entonces **P**$h \wedge$ **F**h es falsa en cada s. Ambas conjunciones son falsas en s_0; la primera conjunción es falsa a la izquierda de s_0; la segunda conjunción es falsa a la derecha. Del mismo modo, por ejemplo, **PP**$h \wedge$ **FF**h es falsa en cada s. Dejo a ustedes la tarea de revisar los detalles.

Ahora, ¿cómo soporta todo esto el argumento de McTaggart? Recuerda que la conclusión del argumento de McTaggart fue que, dado que h tiene cualquier tiempo posible, nunca es posible evitar la contradicción. Resolver las contradicciones en un nivel de complejidad para los tiempos compuestos sólo las crea en otro. El recuento de estos operadores temporales que acabo de dar, muestra que esto es falso. Supongamos que h es verdadera en s_0. Entonces, cualquier afirmación con un tiempo compuesto que concierne a h es verdadera en *algún lugar*. Por ejemplo, consideremos a **FPPF**h. Esto es verdadero en s_{-2}, como lo muestra el siguiente diagrama:

$\ldots s_{-3} \quad s_{-2} \quad s_{-1} \quad s_0 \quad s_1 \quad s_2 \quad s_3 \ldots$

h

Fh

PFh

PPFh

FPPFh

Claramente, podemos hacer lo mismo para cada tiempo compuesto formado de **F** y **P**, zigzagueando hacia la izquierda o la derecha, como se requiere. Y todo esto es perfectamente consistente. La infinitud de diferentes situaciones nos permite asignar a *h* todos los tiempos compuestos en los lugares apropiados sin violar las variadas incompatibilidades entre ellos, teniendo, por ejemplo, a **F***h* y **P***h* como verdaderas en la misma situación. El argumento de McTaggart, por lo tanto, fracasa.

Éste es un feliz resultado para quienes desean creer en la realidad del tiempo. Pero aquellos que están de acuerdo con McTaggart podrían aún no estar persuadidos por nuestras consideraciones. Supongamos que les doy un conjunto de especificaciones para construir una casa: la puerta del frente va aquí; una ventana aquí... ¿Cómo saben que todas estas especificaciones son consistentes? ¿Cómo saben que, cuando hagan la construcción todo funcionará y no pondrán, por ejemplo, la puerta en posiciones incompatibles?

Una forma de determinarlo es construir un modelo a escala en concordancia con todas las especificaciones. Si tal modelo puede construirse, las especificaciones son consistentes. Eso es exactamente lo que hemos hecho con nuestra plática temporal. El modelo es la secuencia de las situaciones, junto con la manera de asignar *V* y *F* a las oraciones temporales. Es un poco más abstracto que el modelo de una casa, pero el principio es esencialmente el mismo.

Sería posible objetar a un modelo, sin embargo. Algunas veces un modelo ignora cosas importantes. Por ejemplo, en el modelo a escala de una casa, tal vez una viga no se caiga porque sostiene mucho menos peso que

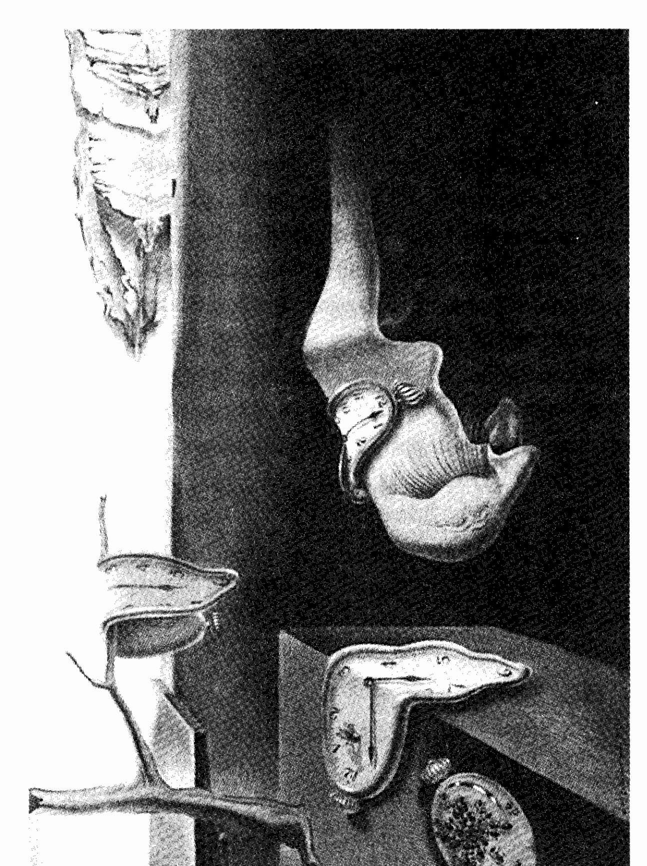


Figura 8. El espacio no fluye. *La persistencia de la memoria*, de Salvador Dalí.

el que sostendrá la viga correspondiente en una construcción de tamaño real. La viga de tamaño real quizá deba soportar una carga imposible, haciendo que la construcción de tamaño real sea imposible, no obstante el modelo. De la misma manera, podría comentarse que nuestro modelo de tiempo ignora cosas importantes. Después de todo, lo que hemos hecho es dar un modelo *espacial* de tiempo (izquierda, derecha, etcétera). Pero el espacio y el tiempo son cosas muy diferentes. El espacio no fluye como lo hace el tiempo (lo que sea que ello signifique). Ahora bien, es exactamente el flujo del tiempo lo que produce la supuesta contradicción que McTaggart estaba señalando. ¡Que no nos sorprenda que esto no se muestre en el modelo! ¿Entonces, qué se pierde exactamente del modelo? Y una vez que se ha considerado, ¿reaparece la contradicción?

Principales ideas del capítulo

- Cada situación viene con una colección asociada de situaciones anteriores o posteriores.
- **F***a* es verdadera en una situación si *a* es verdadera en alguna situación posterior.
- **P***a* es verdadera en una situación si *a* es verdadera en alguna situación anterior.
- **G***a* es verdadera en una situación si *a* es verdadera en cada situación posterior.
- **H***a* es verdadera en una situación si *a* es verdadera en cada situación anterior.

9. IDENTIDAD Y CAMBIO: ¿ES CUALQUIER COSA SIEMPRE LO MISMO?

Aún no hemos terminado con el tiempo. El tiempo está involucrado en muchos otros acertijos, veremos un tipo de ellos en este capítulo. Concierne a problemas que surgen cuando las cosas cambian; y específicamente, a la pregunta sobre lo que podemos decir acerca de la identidad de los objetos que cambian con el tiempo.

Aquí hay un ejemplo. Todos pensamos que los objetos pueden sobrevivir al cambio. Por ejemplo, cuando pinto un armario, aunque su color cambie, sigue siendo el mismo armario. O cuando cambiamos de peinado, o si somos tan desafortunados como para perder una extremidad, seguimos siendo *nosotros*. ¿Pero cómo puede sobrevivir todo al cambio? Después de todo, cuando cambiamos de peinado, la persona que resulta es diferente, no es del todo la misma. Y si la persona es diferente, es una persona diferente; así que el viejo *yo* ha desaparecido de la existencia. Podría discutirse que ningún objeto persiste exactamente de la misma forma a través de cualquier cambio. Todo cambio significa que el viejo objeto desaparece de la existencia y se reemplaza con un objeto muy diferente.

En varios lugares de la historia de la filosofía aparecen argumentos como éste, pero en general los lógicos estarán de acuerdo en que esos argumentos están equi-

vocados, y descansan sobre una ambigüedad muy simple. Debemos distinguir entre un objeto y sus propiedades. Cuando decimos que con un peinado diferente somos diferentes, decimos que tenemos diferentes propiedades. No resulta que seamos literalmente personas diferentes, de la manera en que yo soy diferente a ustedes.

Una razón de por qué uno podría errar al distinguir entre ser un objeto determinado y tener determinadas propiedades es que, en inglés, por ejemplo, el verbo "*to be*" y sus personas de la conjugación "is", "am", etcétera, puede usarse para expresar ambas cosas. (Y sucede lo mismo con palabras similares en otros idiomas.) Si decimos "la mesa es roja", "tu pelo es corto", y cosas similares, estamos atribuyendo una propiedad a un objeto. Pero si alguien dice "yo soy Graham Priest", "la persona que ganó la carrera es la misma persona que ganó el año pasado", etcétera, se está identificando un objeto de alguna manera determinada. Esto es, se está estableciendo su identidad.

Los lógicos llaman al primer uso de "*is*" el "*is*" *del predicado*; y al segundo uso el "*is*" *de identidad*. Y porque de alguna manera éste tiene propiedades diferentes, lo escriben de formas diferentes. Al "*is*" del predicado lo encontramos en el capítulo 3. "Juan es rojo" se escribe típicamente en la forma jR. (De hecho, como lo hice notar en el capítulo 3, es más común escribirlo al revés, como Rj.) El "*is*" de identidad se escribe con =, como en las matemáticas de la escuela. Por lo tanto, "Juan *es* la persona que ganó la carrera" se escribe: $j = w$. (Aquí el nombre w es una descripción; pero esto no tiene importancia para este fin.) Las oraciones como esta se llaman *identidades*.

¿Qué propiedades tiene la identidad? Primero, es una relación. Una relación es algo que vincula dos obje-

tos. Por ejemplo, *ver* es una relación. Si decimos "Juan ve a María" estamos estableciendo una relación entre ellos. Los objetos relacionados no necesariamente tienen que ser diferentes. Si decimos "Juan se ve a sí mismo" (quizá en un espejo), establecemos una relación que Juan sostiene con Juan. Ahora bien, la identidad es una relación muy especial. Es una relación que cada objeto lleva consigo mismo y nada más.

Podría pensarse que ello hace a la identidad una relación inútil, pero, de hecho, no es así. Por ejemplo, si decimos "Juan es la persona que ganó la carrera", estoy diciendo que la relación de identidad se sostiene entre el objeto referido por "Juan" y el objeto referido por "la persona que ganó la carrera" —en otras palabras, que estos dos nombres se refieren a una y a la misma persona. Ello puede ser información muy relevante.

Lo más importante sobre la identidad, sin embargo, son las inferencias que la involucran. Aquí tenemos un ejemplo:

Juan es la persona que ganó la carrera.
La persona que ganó la carrera ganó un premio.
Así que Juan ganó un premio.

Podemos escribir esto como:

$$\frac{j = w \qquad wP}{jP}$$

Esta inferencia es válida en virtud de que, para cualquier objeto, x y y, si $x = y$, entonces x tiene cualquier propiedad que tenga y, y viceversa. Uno y el mismo obje-

to o tiene la propiedad en cuestión, o no la tiene. Esto es llamado *Ley de Leibniz*, por Leibniz, a quien conocimos en el capítulo 6. En una aplicación de la Ley de Leibniz, una premisa es una afirmación de identidad, digamos $m = n$; la segunda premisa es una oración que contiene uno de los nombres que flanquean el signo de igual, digamos m; y la conclusión se obtiene al sustituir n por m.

La Ley de Leibniz es muy importante, y tiene muchas aplicaciones nada problemáticas. Por ejemplo, el álgebra de secundaria nos asegura que $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$. Así que si estamos resolviendo un problema, y estableces que, digamos, $x^2 - y^2 = 3$, podemos aplicar la Ley de Leibniz para inferir que $(x + y)(x - y) = 3$. Su engañosa simplicidad, sin embargo, oculta múltiples problemas. En particular, parece haber muchos contraejemplos. Consideremos, por ejemplo, la siguiente inferencia:

Juan es la persona que ganó la carrera.
María sabe que la persona que ganó la carrera obtuvo un premio.
Así que María sabe que Juan ganó un premio.

Esto parece una aplicación de la Ley de Leibniz, ya que la conclusión se obtiene al sustituir "Juan" por "la persona que ganó la carrera" en la segunda premisa. Aún así, está claro que la premisa bien podría ser verdadera sin que la conclusión lo fuese: María podría no saber que la persona que ganó la carrera es Juan. ¿Es una violación a la Ley de Leibniz? No necesariamente. La ley dice que si $x = y$ entonces cualquier propiedad de x es una propiedad de y. Ahora bien, ¿expresa la condición "María sabe que x ganó un premio" una propiedad de x? En realidad



Figura 9. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), el último lógico notable antes del periodo moderno.

no: en su lugar, parece expresar una propiedad de María. Si María dejara de existir de repente, ¡esto no cambiaría para nada a x! (La lógica de frases como "sabe que" es aún muy *sub judice* en la lógica.)

También surgen problemas como el que sigue. Aquí hay una carretera; es una carretera pavimentada; la lla-

maremos t. Y aquí hay una carretera de tierra; la llamaremos d. Las dos carreteras, sin embargo, son la misma carretera, $t = d$. Es sólo que el pavimento se termina hacia el final de la carretera. Así que la Ley de Leibniz nos dice que t es una carretera de tierra y d es una carretera pavimentada —lo cual no es cierto. ¿Qué salió mal aquí? No podemos decir que el pavimento o la tierra no son en realidad propiedades de la carretera, porque desde luego sí lo son. Lo que ha salido mal (discutiblemente) es esto: no estamos siendo lo suficientemente precisos en nuestra especificación de propiedades. Las propiedades importantes son *ser pavimento de tal a tal punto*, y *ser de tierra de tal a tal punto*. Ya que t y d son la misma carretera, ambos tienen propiedades, y no estamos violando la Ley de Leibniz.

Hasta aquí vamos bien. Estos problemas son relativamente sencillos. Ahora veamos uno que no lo es. Y aquí, el tiempo regresa al asunto. Para explicar cuál es el problema, sería útil emplear los operadores temporales del capítulo anterior, y específicamente **G** ("siempre va a ser el caso que"). Dejemos que x sea cualquier cosa, un árbol, una persona, y consideremos la proposición $x = x$. Esto dice que x tiene la propiedad de ser idéntico a x, lo que obviamente es cierto: es parte del significado mismo de identidad. Y esto es así, sin importar el tiempo. Es cierto ahora, cierto en todo momento del futuro, y cierto en todo momento del pasado. En particular, entonces, $\mathbf{G}\ x = x$ es verdad. Ahora, aquí hay un ejemplo de la Ley de Leibniz:

$$\frac{x = y \qquad \mathbf{G}\ x = x}{\mathbf{G}\ x = y}$$

(No dejemos que nos confunda el hecho de haber sustituido y por una de las apariciones de x en la segunda premisa. Tales aplicaciones de la Ley de Leibniz son perfectamente válidas. Sólo consideremos: "Juan es la persona que ganó la carrera; Juan ve a Juan; así que Juan ve a la persona que ganó la carrera".) Lo que muestra la inferencia es que si x es idéntica a y, y x tiene la propiedad de ser idéntica a x en todo momento futuro, lo mismo ocurre con y. Y ya que la segunda premisa es verdadera, como lo hemos notado, resulta que si dos cosas son idénticas, siempre lo serán.

¿Y qué hay de eso? Simplemente, no siempre parece ser verdadero. Por ejemplo, consideremos una ameba. Las amebas son criaturas acuáticas unicelulares que se multiplican por fisión: una ameba se divide por la mitad para formar dos amebas. Ahora, tomemos a una ameba, A, que se divide para formar dos amebas, B y C. Antes de la división, tanto B como C fueron A. Así que antes de la división, $B = C$. Después de la división, sin embargo, B y C son amebas diferentes. Así que si dos cosas son la misma, no necesariamente se sigue que siempre vayan a serlo.

No podemos salir de este problema de la misma manera en que salimos del anterior. La propiedad de ser idéntico a x en todo momento futuro es ciertamente una propiedad de x. Y no parece ser el caso de que la propiedad se haya planteado de una manera muy burda. Parece que no hay forma de hacerlo con mayor precisión para evitar el problema.

¿Qué más podemos decir? Un pensamiento natural es que antes de la división, B no era A: sólo era *una parte de A*. Pero B es una ameba, y A es una criatura unicelu-

lar: no tiene partes que sean amebas. Así que *B* no puede ser parte de *A*.

Más radicalmente, uno podría sugerir que *B* y *C* en realidad no existieron antes de la división, que empezaron a existir entonces. Si no existieron antes de la división, entonces no fueron *A* antes de la división. Así que no es el caso que $B = C$ antes de la división. Pero esto también parece estar mal. *B* no es una nueva ameba; simplemente es *A*, aunque algunas de sus propiedades han cambiado. Si esto no está claro, sólo imagina que *C* iba a morir en la división. En ese caso, no tendríamos duda al decir que *B* es *A*. (Sólo sería como una serpiente que cambia de piel.) Ahora, la identidad de algo no puede resultar afectada porque hay *otras* cosas alrededor. Así que *A* es *B*; de igual forma *A* es *C*.

Por supuesto, uno podría insistir que sólo porque *A* asume nuevas propiedades, es, estrictamente hablando, un objeto nuevo; no sólo un objeto viejo con nuevas propiedades. Así que *B* no es realmente *A*. Igual ocurre con *C*. Pero ahora regresamos al problema con el que iniciamos el capítulo.

Principales ideas del capítulo

- $m = n$ es verdadero sólo si los nombres *m* y *n* se refieren al mismo objeto.
- Si dos objetos son lo mismo, cualquier propiedad de uno es una propiedad del otro (Ley de Leibniz).

10. VAGUEDAD: ¿CÓMO DEJAMOS DE RESBALAR POR UNA FALACIA DE PRESUNCIÓN?

Ya que estamos en la materia de la identidad, aquí hay otro problema relacionada con ella. Todo se agota en el tiempo. Algunas veces, las partes se reemplazan. Las motocicletas y los coches obtienen nuevos frenos, las casas, techos nuevos, e incluso las células individuales del cuerpo de las personas son reemplazadas con el tiempo. Cambios como estos no afectan la identidad del objeto en cuestión. Cuando reemplazo los frenos de mi motocicleta, sigue siendo la misma motocicleta. Ahora, supongamos que durante un periodo de unos cuantos años, reemplazo cada parte de la motocicleta Blake Thunder. Siendo un tipo cuidadoso, guardo todas las partes viejas. Cuando todo ha sido reemplazado, armo todas las partes viejas para recrear la moto original. Pero comencé con la Black Thunder, y cambiar una parte de la moto no afecta su identidad: aún es la misma moto. Así que con cada reemplazo, la máquina sigue siendo Black Thunder hasta que, al final, es Black Thunder. Pero sabemos que eso no puede ser correcto. Ahora la Black Thunder está estacionada a su lado en el garage.

Aquí hay otro ejemplo del mismo problema. Una persona que tiene cinco años de edad es un niño (biológi-

co). Si alguien es un niño, sigue siendo un niño un segundo después. En cuyo caso, sigue siendo niño un segundo después de ese segundo, y también un segundo después, y así sucesivamente, hasta después de 630,720,000 segundos, sigue siendo un niño. ¡Pero entonces tiene 25 años de edad!

Según la opinión común, argumentos como este fueron inventados por Eubúlides, el mismo que inventó la paradoja del capítulo 5. Ahora son llamadas *paradojas sorites.* (Una forma común del argumento dice que el efecto de agregar cada vez un grano de arena no forma un montón; "sorites" viene de "*soros*", griego para *montón*.) Ésas son algunas de las paradojas más fastidiosas de la lógica. Surgen cuando el predicado utilizado ("es Black Thunder", "es un niño") es *vago*, en cierto sentido; eso es, cuando su aplicación soporta cambios muy pequeños: si se aplica a un objeto, entonces un cambio muy pequeño en el objeto no alterará el hecho. Virtualmente todos los predicados que empleamos en el discurso normal son vagos en este sentido: "es rojo", "está despierto", "es feliz", "está borracho", incluso "está muerto" (morir toma tiempo). Así que los argumentos resbaladizos (falacias de presunción o *slippery slope*) del tipo *sorites* son potencialmente endémicos en nuestro razonamiento.

Para enfocar el asunto que les concierne, consideremos con mayor detalle uno de estos argumentos. Jack será el niño de cinco años. a_0 será la oración "Jack es un niño después de 0 segundos". La oración "Jack es un niño después de 1 segundo" será a_1, y así consecutivamente. Si n es cualquier número, a_n es la oración "Jack es un niño después de n segundos". Dejemos que k sea algún número enorme, al menos tan grande como 630,720,000. Sa-

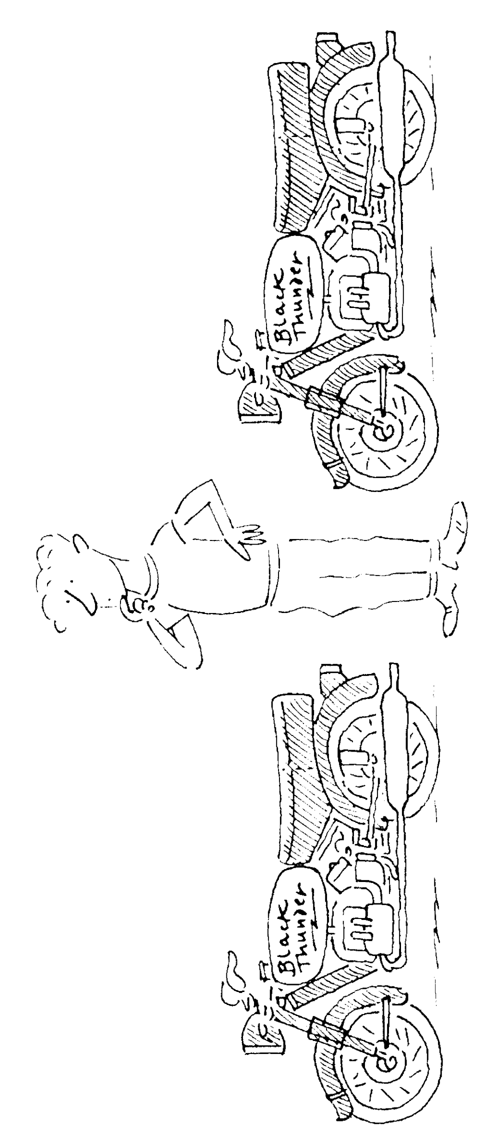


Figura 10. El dilema del motociclista.

bemos que a_0 es verdadero. (Después que han pasado o segundos, Jack aún tiene 5 años.) Y para cada número, n, sabemos que $a_n \to a_{n+1}$. (Si Jack es un niño en cualquier momento, sigue siendo niño un segundo después.) Podemos enlazar todas estas premisas por medio de una secuencia de inferencias del *modus ponens*, como esto:

$$\cfrac{\cfrac{a_0 \qquad a_0 \to a_1}{a_1} \qquad a_1 \to a_2}{a_2}$$

$$\ldots$$

$$\frac{a_{k-1} \qquad a_{k-1} \to a_k}{a_k}$$

La conclusión final es a_k, y sabemos que no es cierta. Algo ha salido mal, y parece que no hay mucho margen de maniobra. Entonces, ¿qué vamos a decir? Aquí hay una respuesta, que a veces se llama *lógica borrosa*. Ser un niño parece desvanecerse, gradualmente, igual que ser un adulto (biológico) parece desvanecerse gradualmente. Parece natural suponer que el valor verdadero de "Jack es un niño" también se degrada de verdadero a falso. Lo verdadero, entonces, aparece por grados. Supongamos que medimos estos grados por números entre el 1 y el 0, el 1 es completamente verdadero y el 0 completamente falso. Cada situación, entonces, asigna a cada oración básica tal número.

¿Qué hay de oraciones que contienen operadores como negación y conjunción? Conforme Jack se va haciendo viejo, el valor verdadero de "Jack es un niño" parecería ir creciendo en concordancia. Esto sugiere que el valor de

verdad de $\sim a$ es 1 menos el valor de verdad de a. Supongamos que escribimos el valor de verdad de a como $|a|$; entonces tenemos:

$$|\sim a| = 1 - |a|$$

Aquí hay una tabla de algunos ejemplos de valores:

a	$\sim a$
1	0
0.75	0.25
0.5	0.5
0.25	0.75
0	1

¿Qué hay sobre el valor de verdad de las conjunciones? Una conjunción sólo puede ser tan buena como su peor parte. Así que es natural suponer que el valor de verdad de $a \wedge b$ es el *minimum* (menor) de $|a|$ y $|b|$:

$$|a \wedge b| = Min(|a|, |b|)$$

Aquí hay una tabla con algunas muestras de valores. Los valores de a están abajo en la columna de la izquierda; los valores de b están a lo largo del renglón superior. Los valores correspondientes de $a \wedge b$ están donde se encuentran la columna y el renglón indicados. Por ejemplo, si queremos encontrar $|a \wedge b|$, donde $|a| = 0.25$ y $|b| = 0.5$, vemos donde se encuentran la columna y el renglón subrayados. El resultado está en negritas.

$a \wedge b$	1	0.75	0.5	0.25	0
1	1	0.75	0.5	0.25	0
0.75	0.75	0.75	0.5	0.25	0
0.5	0.5	0.5	0.5	0.25	0
0.25	0.25	0.25	**0.25**	0.25	0
0	0	0	0	0	0

De la misma forma, el valor de la disyunción es el *maximum* (mayor) de los valores de los disyuntos:

$$|a \vee b| = Max(|a|, |b|)$$

Dejo a ustedes la construcción de una tabla con algunos valores muestra. Es prudente notar que, de acuerdo con los datos en la parte superior, $\sim$, $\wedge$, y $\vee$ todavía son funciones de verdad. Esto es, por ejemplo, el valor de verdad de $a \wedge b$ está determinado por los valores de verdad de a y b. Es sólo que ahora esos valores son números entre 0 y 1, en vez de V y F. (Quizá vale la pena señalar, sin embargo, que si pensamos en 1 como V, y 0 como F, los resultados en los que sólo están involucrados 1 y 0 son los mismos que obtenemos para las funciones de verdad del capítulo 2, como ustedes mismos pueden comprobarlo.)

¿Y qué ocurre con los condicionales? En el capítulo 7 vimos que hay buenas razones para supones que $\rightarrow$ no es una función de verdad, pero por el momento hagamos a un lado esas preocupaciones. Si es una función de verdad, ¿cuál es, ahora que debemos tomar en cuenta los "grados" de verdad? Ninguna respuesta parece demasiado

obvia. Aquí sugerimos una (bastante estándar) que, por lo menos, parece dar los *tipos* correctos de resultados.

Si $|a| \leq |b|$: $|a \rightarrow b| = 1$
Si $|b| < |a|$: $|a \rightarrow b| = 1\ (|a| - |b|)$

($<$ significa "menor a"; $\leq$ significa "menor o igual a".) De esta forma, si el antecedente es menos verdadero que el consecuente, el condicional es completamente verdadero. Si el antecedente es más verdadero que el consecuente, entonces el condicional es menor a la verdad máxima por la diferencia existente entre sus valores. Aquí presentamos una tabla con los valores muestra. (Recuerden que los valores de a están abajo de la columna del extremo izquierdo, y los de b a lo largo de la hilera superior y se cruzan en un sistema de coordenadas.)

$a \rightarrow b$	1	0.75	0.5	0.25	0
1	1	0.75	0.5	0.25	0
0.75	1	1	0.75	0.5	0.25
0.5	1	1	1	0.75	0.5
0.25	1	1	1	1	0.75
0	1	1	1	1	1

¿Qué hay de la validez? Una inferencia es válida si la conclusión se sostiene en cada situación donde se sostienen las premisas. Pero, ahora, ¿qué significa que algo "se sostenga en una situación"? Que sea lo suficientemente verdadero. ¿Pero cuán verdadero es suficiente? Eso sólo depende del contexto. Por ejemplo, "es una motocicleta nueva" es un predicado vago. Si vamos con un vendedor

de motocicletas que dice que determinada moto es nueva, esperamos que nunca antes se haya usado. Eso es, esperamos que "es una motocicleta nueva" tenga un valor 1. Supongamos, por otro lado, que vamos a un rally, y nos piden que seleccionemos las motocicletas nuevas. Seleccionaremos las que tienen menos de un año. En otras palabras, tu criterio de lo que es aceptable como motocicleta nueva es más relajado. "Esta es una motocicleta nueva" necesita tener un valor de sólo, digamos, 0.9, o mayor.

Así que suponemos que hay algún nivel de aceptabilidad determinado por el contexto. Este será un número entre 0 y 1 —quizás el mismo 1 en casos extremos—. Escribamos este número como ε. Entonces una inferencia es válida para ese contexto sólo si la conclusión tiene un valor al menos igual a ε en cada situación donde todas las premisas tienen valores al menos iguales ε.

Ahora, ¿cómo se sostiene todo esto en la paradoja *sorites*? Supongamos que tenemos una secuencia *sorites*. Como arriba, dejemos que a_n sea la oración "Jack es un niño después de n segundos", pero para permitir que sea manejable, supongamos que Jack crece en cuatro segundos. Entonces un registro de valores de verdad podría ser:

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
1	0.75	0.5	0.25	0

$a_0 \rightarrow a_1$ tiene valor 0.75 (= (1−(1−0.75)); igual que $a_1 \rightarrow a_2$; de hecho, cada condicional de la forma $a_n \rightarrow a_{n+1}$ tiene valor 0.75.

Lo que esto nos dice sobre la paradoja *sorites* depende del nivel de aceptabilidad, ε, que se impone aquí. Supongamos que el contexto impone el mayor nivel de aceptación; ε es 1. En este caso, el *modus ponens* es válido. Porque supongamos que $|a| = 1$ y $|a \rightarrow b| = 1$. Ya que $|a \rightarrow b| = 1$, debemos tener $|a| \leq |b|$. Resulta que $|b| = 1$. Por lo tanto el argumento *sorites* es válido. En este caso, sin embargo, cada premisa condicional, que tenga el valor 0.75, es inaceptable.

Si, por otro lado, establecemos el nivel de aceptabilidad por debajo de 1, entonces el *modus ponens* resulta inválido. Supongamos, por ejemplo, que ε es 0.75. Como ya hemos visto, a_1 y $a_1 \rightarrow a_2$ tienen ambos valores 0.75, pero a_2 tiene valor 0.5, que es menor a 0.75.

De cualquier forma que lo veamos, el argumento falla. O algunas de las premisas son inaceptables; o, si son aceptables, las conclusiones no resultan válidas. ¿Por qué hemos caído tan fácilmente en los argumentos *sorites*? Tal vez por que confundimos la verdad completa con la verdad casi completa. Por lo normal una falla para sacar la distinción no hace mucha diferencia pero si lo hacemos de nuevo, otra y otra vez, … sí la marca.

Ése es un diagnóstico del problema. Pero ante la vaguedad nada es recto. ¿Cuál fue el problema al decir que "Jack es un niño" simplemente es verdadero hasta un punto particular del tiempo, cuando simplemente se vuelve falso? Sólo que ahí parece no haber tal punto. Cualquier lugar que uno elija para trazar la línea es por completo arbitrario; puede ser, cuando mucho, un asunto de mera convención. Pero ahora, ¿en qué punto del crecimiento Jack deja de ser cien por ciento niño; eso es, en qué punto "Jack es un niño" cambia de tener valor de exactamen-

te 1, a un valor por abajo de 1? Cualquier lugar que uno elija para trazar esta línea parece tan arbitrario como antes. (Esto algunas veces se conoce como el problema de *vaguedad de alto orden*.) Si eso es correcto, en realidad no hemos resuelto el problema más fundamental de la vaguedad: sólo lo hemos replanteado.

Principales ideas del capítulo

- Los valores de verdad son números entre 0 y 1 (inclusive).
- $|\sim a| = 1 - |a|$
- $|a \vee b| = Max(|a|, |b|)$
- $a \wedge b| = Min(|a|, |b|)$
- $|a \rightarrow b| = 1$ si $|a| \leq |b|$;
  $|a \rightarrow b| = 1 - (|a| - |b|)$ de otra manera.
- Una oración es verdadera en una situación sólo si su valor de verdad es al menos igual que el nivel de aceptabilidad (determinado contextualmente).

11. PROBABILIDAD: EL EXTRAÑO CASO DE LA CLASE DE REFERENCIA PERDIDA

Los capítulos anteriores nos han dado al menos la sensación de que las inferencias son deductivamente válidas, y por qué. Ahora es tiempo de regresar a la cuestión de validez inductiva: esto es, la validez de aquellas inferencias en que las premisas dan alguna base para la conclusión, donde, incluso si las premisas son verdaderas en alguna situación, la conclusión aún podría resultar falsa.

Como lo hice notar en el capítulo 1, Sherlock Holmes era muy bueno para este tipo de inferencias. Empecemos con un ejemplo suyo. El misterio de *La Liga de las Cabezas Rojas* comienza cuando Holmes y el doctor Watson reciben una visita del señor Jabez Wilson. Cuando entra Wilson, Watson busca ver lo que Holmes ha inferido sobre él:

> –Más allá del hecho evidente de que en algún momento ha realizado una labor manual, usa rapé, es masón, ha estado en China y últimamente ha escrito mucho, no puedo deducir nada más.
>
> El señor Jabez Wilson se sobresaltó en su silla, con su dedo índice sobre el papel, pero sus ojos sobre mi compañero.

> —¿Cómo, en el nombre de la buena fortuna, supo usted todo eso, señor Holmes? —preguntó.

Holmes se complace en explicar. Por ejemplo, sobre la escritura:

> —¿Qué más puede indicar esa manga derecha con algunos centímetros tan brillantes, y la izquierda con un parche cerca del codo donde lo descansa sobre el escritorio?

A pesar del hecho de que Holmes no llamaría deducción a este tipo de inferencia, la inferencia es, de hecho, inductiva. Es muy posible que el abrigo de Wilson hubiera mostrado estos patrones sin que él hubiera escrito mucho. Pudo, por ejemplo, habérselo robado a alguien que lo hubiera hecho. Sin embargo, la inferencia es sin duda muy buena. ¿Qué hace buenas este tipo de inferencias? Una respuesta plausible está en términos de probabilidad. Así que hablemos de ello, y luego podremos regresar a la pregunta.

Una probabilidad es un número asignado a una oración que mide cuán probable es, en algún sentido, que la oración sea verdadera. Escribamos $pr(a)$ para la probabilidad de a. Convencionalmente, medimos las probabilidades en una escala entre 0 y 1. Si $pr(a) = 0$, a es desde luego falsa; entonces, conforme $pr(a)$ aumenta, es más probable que a sea verdadera; hasta que $pr(a) = 1$, es por completo verdadera.

¿Qué más podemos decir sobre estos números? Vamos a ilustrarlo con un simple ejemplo. Supongamos que consideramos los días de cualquier semana en particular.



Figura 11. Holmes despliega su destreza lógica.

Dejemos que w sea una oración que es tanto verdadera o falsa según el día, digamos, "hace calor", y dejemos que r sea otra, digamos, "está lloviendo". Dejemos que la siguiente tabla resuma la información relevante:

	lun.	mar.	miér.	jueves	viernes	sáb.	dom.
w			✓	✓		✓	✓
r		✓	✓			✓	

La paloma indica que la oración es verdadera ese día, el espacio en blanco que no lo es.

Ahora, si estamos hablando sobre esta semana en particular, ¿cuál es la probabilidad de que cualquier día elegido al azar, haga calor? Hubo cuatro días calurosos, y

siete días en total. Así que la probabilidad es de 4/7. De igual forma, hubo tres días en que llovió, así que la probabilidad de que llueve es de 3/7:

$$pr(w) = 4/7$$

$$pr(r) = 3/7$$

En general, si escribimos $\#a$ para señalar el número de días en los que la oración a es verdadera, y N para el total de número de días:

$$pr(a) = \#a/N$$

¿Cómo se relaciona la probabilidad con la negación, la conjunción y la disyunción? Empecemos con la negación. ¿Cuál es la probabilidad de $\sim w$? Bueno, hubo tres días en los que no hubo calor, así que $pr(\sim w) = 3/7$. Notemos que $pr(w)$ y $pr(\sim w)$ han aumentado a 1. Esto no es ningún accidente. Tenemos:

$$\#w + \#{\sim}w = N$$

Dividiendo ambos lados entre N, obtenemos:

$$\frac{\#w}{N} + \frac{\#{\sim}w}{N} = 1$$

Esto es, $pr(w) + pr(\sim w) = 1$.

Para la conjunción y la disyunción: hubo dos días en los que hizo calor y llovió, así que $pr(w \wedge r) = \#(w \wedge r)/N = 2/7$. Y hubo cinco días en los que hizo calor o llovió, así que $pr(w \vee r) = \#(w \vee r)/N = 5/7$. ¿Cuál es la

relación entre estos dos números? Para encontrar el número de días cuando $w \vee r$ es verdadero, podemos empezar sumando los días en que w es verdadero, luego sumar el número de días en que r es verdadero. Esto no resulta, ya que algunos días pueden haber sido contados dos veces: miércoles y sábado. Fueron los días en los que llovió e hizo calor. Así que para obtener la cifra correcta, debemos restar el número de días en que sucedieron ambas cosas:

$$\#(w \vee r) = \#w + \#r - \#(w \wedge r)$$

Dividiendo ambas partes entre N, obtenemos:

$$\frac{\#(w \vee r)}{N} = \frac{\#w}{N} + \frac{\#r}{N} - \frac{\#(w \wedge r)}{N}$$

Esto es:

$$pr(w \vee r) = pr(w) + pr(r) - pr(w \wedge r)$$

Esta es la relación general entre las probabilidades de conjunciones y de disyunciones.

En el capítulo anterior vimos que los grados de verdad también pueden medirse por números entre 0 y 1, y podría ser natural suponer que los grados de verdad y probabilidades son lo mismo. Pero no es así. En particular, la conjunción y la disyunción trabajan en forma muy diferente. Para los grados de verdad, la disyunción en una función verdadera. Específicamente, $|w \vee r|$ es el máximo de $|w|$ y $|r|$. Pero $pr(w \vee r)$ no está determinada solamente por $pr(w)$ y $pr(r)$, como acabamos de ver. En particular, para nuestros w y r, $pr(w) = 4/7$, $pr(r) = 3/7$, y $pr(w \vee r) = 5/7$. Pero si $|w| = 4/7$ y $|r| = 3/7$, $|w \vee r| = 4/7$, no 5/7.

Antes de regresar a las inferencias inductivas, necesitamos un poco más de información sobre la probabilidad. Dada nuestra semana de muestra, la probabilidad de que llueva algún día, elegido al azar, es 3/7. Pero supongamos que sabes que el día en cuestión hizo calor. ¿Cuál es ahora la probabilidad de que llueva? Bueno, hubo cuatro días calurosos, pero sólo dos de ellos llovió, así que la probabilidad es de 2/4. Esta cifra es llamada *probabilidad condicional*, y se escribe así: $pr(r|w)$, la probabilidad de r dado w. Si pensamos en esto un momento, podemos establecer una fórmula general para calcular probabilidades condicionales. ¿Cómo llegamos a la cifra 2/4? Primero, nos restringimos a aquellos días en que w es verdadera; luego dividimos esto entre el número de días en que r es verdadera, esto es, el número de días cuando tanto w como r son verdaderas. En otras palabras:

$$pr(r|w) = \#(w \wedge r) \div \#w$$

Un poco de álgebra nos dice que esto equivale a:

$$\frac{\#(w \wedge r)}{N} \div \frac{\#w}{N}$$

Y esto es $pr(w \wedge r) \div pr(w)$.

Así que aquí está nuestra fórmula general para la probabilidad condicional:

PC: $pr(w|r) = pr(w \wedge r)/pr(w)$

Se requiere un poco de cuidado al aplicar esta fórmula. Dividir entre el número 0 no tiene sentido. 3/0, por ejemplo, no tiene valor. Los matemáticos llaman a esta relación *indefinida*. En la fórmula para $pr(w|r)$, hemos dividido entre $pr(w)$, lo que tiene sentido sólo si éste no es cero, esto es, sólo si w es verdadera al menos algunas veces. De otro modo, la probabilidad condicional está indefinida.

Ahora, al fin podemos regresar a las inferencias inductivas. ¿Qué necesita una inferencia para ser inductivamente válida? Sólo que las premisas hagan la conclusión más probable que su negación. Esto es, la probabilidad condicional de c, la conclusión, dada p, la premisa (o la conjunción de las premisas si hay más de una), es mayor que la de la negación de c:

$$pr(c|p) > pr(\sim c|p)$$

Entonces, si estamos razonando sobre la semana de nuestro ejemplo, la inferencia:

Fue un día lluvioso; así que hizo calor;

es inductivamente válida. Ya que es fácil revisar, $pr(w|r) = 2/3$, y $pr(\sim w|r) = 1/3$.

El análisis puede aplicarse para mostrar por qué la inferencia de Holmes con la que empezamos es válida. Holmes concluyó que Jabez Wilson había estado escribiendo mucho (c). Su premisa resultó de haber notado ciertas marcas de uso en el saco de Wilson (p). Ahora, si hubiéramos visitado el Londres de los días de Holmes, y reunido a todas las personas que usaran sacos del tipo en cuestión, la mayoría hubiera sido oficinistas, personas que dedicaban sus vidas laborales a escribir —o eso hubiéramos supuesto. Por lo tanto, la probabilidad de que Jabez

hubiera estado escribiendo mucho, dado que su saco llevaba esas marcas, era mayor que la probabilidad de que no hubiera sido así. La inferencia de Holmes es inductivamente válida.

Terminemos señalando un enigma producto del mecanismo que acabamos de desplegar. Como hemos visto, una probabilidad puede calcularse como una relación: tomamos cierta *clase de referencia*; luego calculamos los números de varios grupos dentro de ella y hacemos algunas divisiones. ¿Pero qué clase de referencia usamos? En el ejemplo ilustrativo sobre el clima, empecé especificando la clase de referencia en cuestión: los días de esa semana en particular. Pero los problemas de la vida real no se plantean de esta forma.

Regresemos a Jabez Wilson. Para resolver las probabilidades relevantes de este caso, sugerí que tomáramos una clase de referencia que comprendía a las personas que vivieron en el Londres de los días de Holmes. ¿Pero por qué es esto? ¿Por qué no a las personas que vivieron en toda Inglaterra, o en Europa, o sólo a los varones de Londres, o sólo a las personas que podían ir a ver a Holmes? Tal vez en algunos de los casos, no hubiera marcado mucha diferencia. Pero en otros ciertamente lo hubiera hecho. Por ejemplo, todas las personas que iban a ver a Holmes tenían una situación más o menos acomodada, y no es probable que hubieran usado sacos de segunda mano. Las cosas hubieran sido un poco diferentes con una población más amplia. ¿Así que cuál debió haber sido la clase de referencia apropiada? Éste es el tipo de pregunta que mantiene a los actuarios (que tratan de calcular los factores de riesgo para las compañías de seguros) despiertos por las noches.

En el último análisis, la clase de referencia más acertada parece ser la que comprende sólo al propio Wilson. Después de todo, ¿qué tienen que ver con él los hechos sobre *otras* personas? Pero en ese caso, o estuvo escribiendo mucho, o no. En el primer caso, la probabilidad de que haya estado escribiendo ya que tiene una manga con brillo, es 1, y la inferencia es válida; en la segunda, es 0, y la inferencia no es válida. En otras palabras, la validez de la inferencia depende por completo de la veracidad de la conclusión. Así que no podemos emplear la inferencia para *determinar* si la conclusión es verdadera o no. Si vamos tan lejos, la noción de validez que obtenemos es por completo inútil.

Principales ideas del capítulo

- La probabilidad de una afirmación es el número de casos en la que es verdadera, dividido entre el número de casos en la clase de referencia.
- $pr(\sim a) = 1 - pr(a)$
- $pr(a \vee b) = pr(a) + pr(b) - pr(a \wedge b)$
- $pr(a|b) = pr(a \wedge b) / pr(b)$
- Una inferencia es inductivamente válida sólo si la probabilidad condicional de la conclusión dada la (conjunción de) la (s) premisa (s) es mayor que la de su negación dadas las premisas.

12. PROBABILIDAD INVERSA: ¡NO PODEMOS SER INDIFERENTES A ELLA!

El capítulo anterior nos aportó una comprensión básica de la probabilidad y del papel que podría desempeñar en las inferencias inductivas. En este capítulo consideraremos algunos aspectos posteriores de ello. Empecemos estudiando una famosa inferencia inductiva.

El cosmos físico no es sólo un desorden al azar. Muestra patrones muy distintivos: la materia se estructura en galaxias que, a su vez, se estructuran en estrellas y sistemas planetarios, y en algunos de esos sistemas planetarios, la materia se estructura de tal manera como para producir criaturas vivientes como nosotros. ¿Cuál es la explicación correcta? Podríamos decir que está determinada por las leyes de la física y la biología. Y quizá así sea. ¿Pero por qué son así las leyes de la física y la biología? Después de todo, pudieron haber sido muy diferentes. Por ejemplo, la gravedad pudo haber sido una fuerza de *repulsión*, no de atracción. En ese caso, nunca hubiera habido fragmentos estables de materia, y la vida como la conocemos hubiera sido imposible en cualquier parte del cosmos. ¿No nos da esto una excelente razón para creer en la existencia de un creador del cosmos, junto con sus leyes físicas y biológicas, para algún propósito u otro? En



Figura 12. La materia tiene una estructura distintiva. Una galaxia de remolino.

pocas palabras, ¿no nos da motivo para pensar en la existencia de un dios de cierto tipo el hecho de que el cosmos físico esté ordenado como lo está?

Con frecuencia este argumento es llamado "Argumento del Diseño" (para la existencia de Dios). Debería ser llamado Argumento *para* el Diseño; pero eso no importa. Pensemos en ello más detenidamente. La premisa del argumento, o, es una afirmación a efecto de que el cosmos esté ordenado de una manera determinada. La conclusión, g, asegura la existencia de un Dios creador. A menos que g fuera verdadera, o sería más poco probable; así que, el argumento desaparece, dado que o, g es probable.

Ahora, desde luego es verdad que la probabilidad condicional de o, cuando g es verdadera, es mucho mayor que la de o, cuando g es falsa:

1. $pr(o|g) > pr(o|\sim g)$

Pero esto no nos da lo que queremos. Para que o sea una buena razón inductiva de g, necesitamos que la probabilidad de g, dada o, sea mayor que la de su negación:

2. $pr(g|o) > pr(\sim g|o)$

Y el hecho de que $pr(o|g)$ sea elevada, no significa necesariamente que $pr(g|o)$ lo sea. Por ejemplo, la probabilidad de que estemos en Australia, si vemos un canguro suelto, es muy alta. (En cualquier otra parte debió de haber escapado de un zoológico.) Pero la probabilidad de que veamos a un canguro suelto, dado que vivimos en Australia, es muy baja. (Yo viví en Australia durante 10 años antes de ver uno.)

$pr(o|g)$ y $pr(g|o)$ son llamadas *probabilidades inversas*, y hemos visto que para que funcione el argumento del diseño, la relación entre ellas debe ser tal como para llevarnos de 1 a 2. ¿Lo es? Hay, de hecho un relación muy simple entre las probabilidades inversas. Recuerda la ecuación **PC** del capítulo anterior que, por definición:

$$pr(a|b) = pr(a \wedge b)/pr(b)$$

Así que:

3. $pr(a|b) \times pr(b) = pr(a \wedge b)$

De modo similar:

$$pr(b|a) = pr(b \wedge a)/pr(a)$$

Así que:

4. $pr(b|a) \times pr(a) = pr(b \wedge a)$

Pero $pr(a \wedge b) = pr(b \wedge a)$ (ya que $a \wedge b$ y $b \wedge a$ son verdaderas en exactamente las mismas situaciones). Por lo tanto, 3 y 4 nos dan:

$$pr(a|b) \times pr(b) = pr(b|a) \times pr(a)$$

Asumiendo que $pr(b)$ no es 0 (debo hacer suposiciones de este tipo sin mayor mención) podemos rearreglar esta ecuación para obtener:

Inv: $pr(a|b) = pr(b|a) \times pr(a)/pr(b)$

Esta es la relación entre probabilidades inversas. (Para recordar esto puede ayudarnos notar que del lado derecho, su primera *b* resultó de una *a*, y luego de una *b* resultó una *a*.)

Usando **Inv** para reescribir las probabilidades inversas en 1, obtenemos:

$$pr(g|o) \times \frac{pr(o)}{pr(g)} > pr(\sim g|o) \times \frac{pr(o)}{pr(\sim g)}$$

Y cancelando $pr(o)$ en ambos lados nos da:

$$\frac{pr(g|o)}{pr(g)} > \frac{pr(\sim g|o)}{pr(\sim g)}$$

O, reacomodando la ecuación:

5. $\dfrac{pr(g|o)}{pr(\sim g|o)} > \dfrac{pr(g)}{pr(\sim g)}$

Recordemos que para que el Argumento para el Diseño funcione, debemos obtener 2, lo que es equivalente a:

$$\frac{pr(g|o)}{pr(\sim g|o)} > 1$$

Parecería que la única cosa plausible que nos traerá esto de 5 es $\dfrac{pr(g)}{pr(\sim g)} \geq 1$, esto es:

$$pr(g) \geq pr(\sim g)$$

Los valores $pr(g)$ y $pr(\sim g)$ se llaman *probabilidades previas*; esto es, las probabilidades de g y $\sim g$ previas a la aplicación de cualquier evidencia, como *o*. Por lo tanto, lo que al parecer necesitamos para hacer que funcione el Argumento es que la probabilidad previa de que hay un Dios creador sea mayor que (o igual que) la probabilidad previa de que no lo hay.

¿Es así? Desafortunadamente, no hay razón para creerlo. De hecho, parece que es todo lo contrario. Supongamos que no sabemos qué día de la semana es. Dejemos que *m* sea la hipótesis de que es lunes. Entonces $\sim m$ es la hipótesis de que no es lunes. ¿Qué es más probable, *m* o $\sim m$? Con seguridad $\sim m$: porque hay muchas más formas de que no sea lunes de las que existen para que lo sea. (Podría ser martes, miércoles, jueves…) Pasa algo semejante con Dios. Es plausible considerar que hay muchas formas diferentes para que el cosmos haya existi-

do. E intuitivamente, sólo pocas de ellas están ordenadas de modo significativo: el orden es algo *especial* que, después de todo, da su razón al Argumento para el Diseño. Pero entonces hay relativamente pocos cosmos posibles en los que existe un *orden*. Así que *a priori*, es mucho más probable que no haya un creador a que lo haya.

Lo que vemos, entonces, es que el Argumento para el Diseño falla. Es seductor porque la gente con frecuencia confunde las probabilidades con sus inversos, y por lo tanto se deslizan sobre una parte crucial del argumento.

Muchos argumentos inductivos requieren que razonemos sobre las probabilidades inversas. El Argumento para el Diseño no es especial en esta consideración. Pero muchos argumentos son más exitosos para hacerlo. Déjenme ilustrarlo. Supongamos que visitamos un casino. Tienen dos ruedas de ruleta, *A* y *B*. Un amigo nos ha dicho que una de ellas está arreglada, aunque no pudo decir cuál. En vez de dar rojo la mitad del tiempo y negro la otra mitad, como lo haría una ruleta normal, cae en rojo (R) 3/4 partes del tiempo, y en negro (N) 1/4 parte del tiempo. (Estrictamente hablando, las verdaderas ruedas de ruleta ocasionalmente también caen en verde; pero ignoremos este hecho para mantener simples las cosas.) Ahora, supongamos que observamos una de las ruedas, digamos la *A*, y en cinco giros sucesivos da los siguientes resultados:

R, R, R, R, N

¿Tenemos justificación para suponer que ésta es la rueda arreglada? En otras palabras, dejemos que *c* sea una afirmación para el efecto de esta secuencia que resultó en particular, y que *f* sea la afirmación de que la rueda *A* es

la arreglada. ¿Es la inferencia de *c* a *f* una adecuada inferencia inductiva?

Necesitamos saber si $pr(f|c)>pr(\sim f|c)$. Usando la ecuación **Inv** para convertir esto en una relación entre probabilidades inversas, lo que esto significa es que:

$$pr(c|f) = \frac{pr(f)}{pr(c)} > pr(c|\sim f) \times \frac{pr(\sim f)}{pr(c)}$$

Multiplicando ambos lados por $pr(c)$ resulta:

$$pr(c|f) \times pr(f) > pr(c|\sim f) \times pr(\sim f)$$

¿Es verdadero esto? Para empezar, ¿cuáles son las probabilidades previas de *f* y $\sim f$? Sabemos que ya sea *A* o *B* está arreglada (pero no ambas). No tenemos más razón para creer que es la rueda *A* la que está arreglada, en vez de la *B*, o viceversa. Así que la probabilidad de que sea la rueda *A* es de 1/2, y la probabilidad de que sea la rueda *B* es de 1/2. En otras palabras, $pr(f) = 1/2$, y $pr(\sim f) = 1/2$. Así que podemos cancelar esto, y la condición importante se convierte en:

$$pr(c|f) > pr(c|\sim f)$$

La probabilidad de observar la secuencia establecida por *c*, dado que la rueda está arreglada de la manera descrita, $pr(c|f)$, es $(3/4)^4 \times (1/4)$. (No importa si no saben por qué: pueden creer en mi palabra de que así es.) Esto es $8\ 1/4^5$, que resulta 0.079. La probabilidad de que la secuencia sea observada, dado que la rueda no está arreglada, y por lo tanto es justa, $pr(c|f)$, es $(1/2)^5$ (de nuevo, tomen mi palabra para esto si lo desean), lo que resul-

ta 0.031. Esto es menos que 0.079. Así que la inferencia es válida.

La manera en que hemos resuelto probabilidades previas aquí no vale nada. Tenemos dos posibilidades: o la rueda A está arreglada, o la rueda B. Y no tenemos información que distinga entre estas dos posibilidades. Así que les asignamos la misma probabilidad. Esto es una aplicación del *Principio de Indiferencia.* Tal Principio nos dice que cuando tenemos un número de posibilidades, sin diferencia importante entre sí, todas tienen la misma probabilidad. Por lo tanto, si hay N posibilidades en todos, todos tienen probabilidad $1/N$. El Principio de Indiferencia es un tipo de principio de *simetría.*

No podemos aplicar el Principio en el Argumento para el Diseño. En el caso de la ruleta, hay dos posibles situaciones completamente simétricas: la rueda A está arreglada; la rueda B está arreglada. En el Argumento para el Diseño, hay dos situaciones: un dios-creador existe; un dios-creador no existe. Pero estas dos situaciones no son más simétricas que: hoy es lunes; hoy no es lunes. Como vimos, intuitivamente, hay muchas más posibilidades en las que no hay un creador, que posibilidades en las que si lo hay.

El Principio de Indiferencia es una parte importante del razonamiento intuitivo sobre la probabilidad. Terminemos este capítulo notando que no deja de tener problemas. Sabemos bien que algunas de sus aplicaciones llevan a paradojas. Aquí hay una.

Supongamos que un carro sale de Brisbane al medio día, rumbo a un pueblo a 300 km de distancia. El carro promedia una velocidad constante entre los 50 km/h y los 100 km/h ¿Qué podemos decir sobre la probabilidad

del horario de su llegada? Bueno, si va a 100 km/h llegará a las 3 p.m.; y si va a 50 km/h, llegará a las 6 p.m. Por lo tanto, llegará entre esos dos horarios. El punto medio entre estos horarios es 4:30 p.m. Así que por el principio de indiferencia, es tan probable que el carro llegue antes de las 4:30 p.m. como después de esa hora. Pero ahora, la mitad entre 50 km/h y 100 km/h es 75 km/h. Así que de nuevo según el principio de indiferencia, es tan probable que el carro viaje arriba de los 75 km/h como que lo haga por debajo de los 75 km/h. Si viaja a 75 km/h, llegará a las 4 p.m. Así que es tan probable que llegue antes de las 4 p.m. como que llegue después de las 4 p.m. En particular, entonces, es *más* probable que llegue antes de las 4:30 p.m. a que lo haga después. (Eso le da media hora extra.)

Los dejo pensando sobre esto. ¡Hemos tenido suficiente sobre la probabilidad para un solo capítulo!

Principales ideas del capítulo

- $pr(a|b) = pr(b|a) \times \dfrac{pr(a)}{pr(b)}$
- Dado un número de posibilidades, sin diferencia importante entre ellas, todas tienen la misma probabilidad (Principio de Indiferencia).

13. TEORÍA DE LA DECISIÓN: GRANDES EXPECTATIVAS

Echemos un vistazo a un punto final relativo al razonamiento inductivo. Este tema a veces es llamado *razonamiento práctico*, ya que razona sobre cómo deberíamos actuar. Aquí hay una famosa pieza de razonamiento práctico.

Podemos elegir creer en la existencia de un Dios (cristiano); puedes elegir no hacerlo. Supongamos que elegimos creer. O Dios existe o no existe. Si Dios existe, todo está bien. Si no, entonces nuestra creencia es un inconveniente menor: significa que hemos perdido un poco de tiempo en la iglesia, y quizá hayamos hecho un par de cosas que de otro modo no hubiéramos querido hacer; pero nada de esto es desastroso. Ahora supongamos, por otro lado, que elegimos no creer en la existencia de Dios. De nuevo, puede ser que Dios exista o que no. Si Dios no existe, todo está bien. Pero si Dios *sí* existe, ¡vaya que estamos en problemas! Nos espera mucho sufrimiento en el más allá; quizá por toda la eternidad si no hay un poco de misericordia. Así que cualquier persona inteligente debería creer en la existencia de Dios. Es el único camino prudente.

El argumento es hoy por lo general llamado *Apuesta de Pascal*, en honor al filósofo del siglo XVII Blaise Pas-

cal, quién lo utilizó primero. ¿Qué puede uno decir sobre la Apuesta?

Pensemos un poco cómo funciona este tipo de razonamiento, empezando con un ejemplo un poco menos polémico. Cuando realizamos acciones, con frecuencia no podemos estar seguros de sus resultados, los que quizá no estén por completo bajo nuestro control. Pero con frecuencia podemos estimar cuán probables son los diferentes resultados; e, igual de importante, podemos calcular el *valor* de los diferentes resultados para nosotros mismos. Convencionalmente, podemos medir el valor de una consecuencia asignándole un número en la siguiente escala, con un final abierto en ambas direcciones:

$$\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \ldots$$

Los números positivos son buenos, y entre más hacia la derecha se encuentren, mejor. Los números negativos son malos, y entre más hacia la izquierda se encuentren, son peores. 0 son un punto de indiferencia: de todas formas no nos interesa.

Ahora, supongamos que hay alguna acción que realizamos, digamos dar un paseo en moto. Podría, sin embargo, llover. Un paseo en moto cuando no llueve es muy divertido, así que podemos valorar eso en, digamos, +10. Pero un paseo en moto cuando está lloviendo puede ser muy desagradable, así que podemos valorar eso en, digamos, −5. ¿Qué valor debe ponerse en la única cosa que está bajo nuestro control: ir de paseo? Podemos sólo añadir las dos cifras, −5 y 10, pero eso sería perder una parte importante de la imagen. Puede ser muy poco probable que llueva, así que aunque la posibilidad de que llueva es

mala, no queremos darle mucho peso. Supongamos que la probabilidad de lluvia es, digamos, 0.1; en consecuencia, la probabilidad de que no llueva es de 0.9. Entonces podemos medir los valores con las probabilidades apropiadas para llegar a un valor general:

$$0.1 \times (-5) + 0.9 \times 10$$

Esto es igual a 8.5, y se llama la *expectativa* de la acción en cuestión, dar un paseo. ("Expectativa" es un término técnico; virtualmente no tiene nada que ver con el significado de la palabra y su uso normal en español.)

En general, dejamos que a sea la afirmación de que realizamos una acción u otra. Supongamos, para simplificar, que hay dos posibles resultados; dejemos que o_1 establezca uno de estos resultados, y que o_2 establezca el segundo. Finalmente, dejemos que $V(o)$ sea el valor que asignamos si o es verdadero. Entonces la expectativa de a, $E(a)$, es el número definido por:

$$pr(o_1) \times V(o_1) + pr(o_2) \times V(o_2)$$

(Estrictamente hablando, las probabilidades en cuestión deberían ser probabilidades condicionales, $pr(o_1|a)$ y $pr(o_2|a)$, respectivamente. Pero, en el ejemplo, dar un paseo no tiene efecto sobre la probabilidad de que llueva. Lo mismo es verdadero en todos los otros ejemplos que veremos. Así que nos podemos apegar a las simples probabilidades previas.)

Hasta aquí todo va bien. ¿Pero cómo me ayuda esto a decidir si dar o no un paseo en moto? Conozco el valor general de mi paseo en moto. Su expectativa es de 8.5,

como acabamos de ver. ¿Cuál es la expectativa de no dar el paseo? De nuevo, ya sea que llueva o no, con las mismas probabilidades. Los dos resultados ahora son (i) que lloverá y me quedaré en casa; y (ii) que no lloverá y me quedaré en casa. En cada uno de estos casos, no obtengo el placer de un paseo en moto. Podría ser un poco peor si no lloviera. En ese caso estaría molesto por no haber ido. Pero ninguno de los casos es tan malo como empaparse. Así que los valores podrían ser 0 si llueve, y -1 si no llueve. Ahora puedo calcular la expectativa de quedarme en casa:

$$0.1 \times 0 + 0.9 \times (-1)$$

Esto resulta en -0.9, y me da la información que necesito, puesto que debería elegir esa acción que tiene el valor general más alto, esto es, la expectativa. En este caso, ir tiene la expectativa de 8.5, mientras que quedarme en casa tiene un valor de -0.9. Así que debería dar el paseo.

Por lo tanto, dada una selección entre a y $\sim a$, debería elegir cualquiera que tenga la mayor expectativa. (Si son iguales, simplemente puedo elegir al azar, por ejemplo arrojando una moneda.) En el caso previo, sólo hay dos posibilidades. En general, debería haber más (digamos, dar un paseo, ir al cine, y quedarme en casa). El principio es el mismo, sin embargo: calculo la expectativa de cada posibilidad, y elijo la que tiene la mayor expectativa. Este tipo de razonamiento es un simple ejemplo de la rama de la lógica llamada *teoría de la decisión*.

Ahora, regresemos a la Apuesta de Pascal. En este caso, hay dos acciones posibles: creer o no; hay dos posibilidades importantes: Dios existe o no existe. Podemos

representar la información relevante en la forma de la siguiente tabla.

	Dios existe	Dios no existe
Creo (b)	$0.1 \backslash + 10^2$	$0.9 \backslash - 10$
No creo ($\sim b$)	$0.1 \backslash - 10^6$	$0.9 \backslash + 10^2$

Las cifras hacia la izquierda de las diagonales invertidas son las probabilidades importantes, 0.1 de que Dios existe, digamos, y 0.9 de que Dios no existe. (Lo que yo crea o no, no tiene efecto sobre la existencia de Dios, así que las probabilidades son las mismas en ambos renglones.) Las cifras en la derecha de las diagonales son los valores importantes. No me importa mucho si Dios existe o no; lo importante es que lo tengo claro; así que el valor en cada uno de los casos es $+10^2$. (Quizá las preferencias de uno aquí podrían no ser exactamente las mismas, pero no importa demasiado, como veremos.) Creer, cuando Dios no existe, es un inconveniente menor, así que obtiene el valor -10. No creer, cuando Dios sí existe, es realmente malo, sin embargo, por lo que obtiene el valor -10^6.

Dados estos valores, podemos computar las expectativas relevantes:

$$E(b) = 0.1 \times 10^2 + 0.9 \times (-10) \simeq 0$$
$$E(\sim b) = 0.1 \times (-10^6) + 0.9 \times 10^2 \simeq -10^5$$

($\simeq$ significa "es aproximadamente igual a".) Deberé elegir la acción que tenga una mayor expectativa, la cual es creer.

Podríamos pensar que los valores precisos que he elegido son en alguna forma artificiales; y lo son. Pero, de

hecho, los valores precisos no importan mucho en realidad. El importante es -10^6. Esta cifra representa algo que es realmente malo. (Algunas veces, un teórico de la decisión podría escribir esto como $-\infty$.) Es tan malo que hundirá a todas las otras cifras, incluso si la probabilidad de que Dios exista es muy baja. Ésa es la fuerza en la Apuesta de Pascal.

La Apuesta podría parecer muy persuasiva, pero de hecho comete un error simple de teoría de la decisión teórica. Omite algunas posibilidades relevantes. No hay sólo un dios posible, hay muchos: el Dios cristiano, el Alá del Islam, el Brahman del Hinduismo, y muchos otros que veneran varias religiones menores. Y muchos de éstos son unos dioses muy celosos. Si Dios existe, y no creemos en él, estás en problemas; pero si Alá existe y no creemos en él, también estamos en problemas; y así. Además, si Dios existe y tú crees en Alá —o viceversa— es aún peor, ya que tanto en el cristianismo como en el Islam, creer en dioses falsos es peor que ser un simple ateo.

Hagamos una tabla con un poco de información más realista.

	No existe	Dios existe	Alá existe	ningún dios
No creer (n)	$0.9\backslash+10^2$	$0.01\backslash-10^6$	$0.01\backslash-10^6$	...
Creer en Dios (g)	$0.9\backslash-10$	$0.01\backslash+10^2$	$0.01\backslash-10^9$	...
Creer en Alá (a)	$0.9\backslash-10$	$0.01\backslash-10^9$	$0.01\backslash+10^2$	...
⋮	⋮	⋮	⋮	

Si computamos las expectativas incluso en esta limitada cantidad de información, obtenemos:

$$E(n)=0.9\times 10^2+0.01\times(-10^6)+0.01\times(-10^6)\simeq -2\times 10^4$$
$$E(g)=0.9\times(-10)+0.01\times 10^2+0.01\times(-10^9)\simeq -10^7$$
$$E(a)=0.9\times(-10)+0.01\times(-10^9)+0.01\times 10^2\simeq -10^7$$

Las cosas no parecen prometedoras. Pero es claro que los creyentes en algún dios resultarán peor. No deberíamos creer en ninguno.

Terminemos, como he concluido todos los capítulos, con algunas razones de por qué deberíamos preguntarnos sobre el marco referencial desplegado; específicamente, en este caso, la política de decidir de acuerdo con la mayor expectativa. Hay situaciones donde esto definitivamente parece dar los resultados equivocados.

Supongamos que hacemos la jugada equivocada en la Apuesta de Pascal, y terminamos en el infierno. Después de unos pocos días, aparece el diablo con una oferta. Dios ha ordenado que se nos debe tener algo de piedad. Así que el diablo ha maquinado un plan. Nos va a dar una oportunidad para salir del infierno. Podemos arrojar una moneda; si cae cara, saldremos e iremos al cielo. Si cae cruz, nos quedaremos en el infierno para siempre. Sin embargo, la moneda no es una moneda imparcial y el diablo controla sus posibilidades. Si la arrojamos hoy, la posibilidad de que caiga cara es de $1/2$ (por ejemplo, $1-1/2$). Si esperamos a mañana, la posibilidad aumenta a $3/4$ (por ejemplo, $1-1/2^2$). Sumemos la información:

	Escapar	Quedarse en el infierno
Arrojarla hoy (*d*)	$0.5\backslash +10^{6}$	$0.5\backslash -10^{6}$
Arrojarla mañana (*m*)	$0.75\backslash +10^{6}$	$0.25\backslash -10^{6}$

Escapar tiene un valor positivo muy grande; quedarse en el infierno tiene un valor negativo muy grande. Además, estos valores son los mismos hoy que mañana. Es cierto que si esperamos a mañana, deberemos pasar un día *más* en el infierno, pero un día es insignificante comparado con el infinito número de días que siguen. Así que hacemos los cálculos:

$$E(d) = 0.5 \times 10^6 + 0.5 \times (-10^6) = 0$$
$$E(m) = 0.75 \times 10^6 + 0.25 \times (-10^6) = 0.5 \times 10^6$$

Y decidimos esperar a mañana.

Pero mañana viene el diablo y nos dice que si esperamos un día más, las probabilidades serán aún mejores: aumentarán a 7/8 (por ejemplo, $1\text{-}1/2^3$). Dejaré que hagan los cálculos. Así que decidimos esperar hasta el día siguiente. El problema es que *cada* día viene el diablo y nos ofrece mejores probabilidades si esperamos al día siguiente. Las probabilidades son mejores, día tras día, como sigue:

$$1\text{-}1/2,\ 1\text{-}1/2^2,\ 1\text{-}1/2^3,\ 1\text{-}1/2^4,\ \ldots,\ 1\text{-}1/2^n,\ \ldots$$

Cada día hacemos los cálculos. La expectativa de arrojar la moneda el día n^{avo} es:

$$(1\text{-}1/2^n) \times 10^6 + 1/2^n \times (-10^6)$$



Figura 13. Un plan diabólico: nunca hagas hoy lo que puedes dejar para mañana.

Un poco de aritmética nos dice que esto es $10^6 \times (1\text{-}2/2^n) = 10^6 \times (1\text{-}1/2^{n-1})$. La expectativa por esperar hasta el día siguiente, $n + 1$er día es la misma, con n reemplazado por $n + 1$. Esto es, $10^6 \times (1\text{-}1/2^n)$ —lo que es mayor. ($1/2^n$ es menor que $1/2^{n-1}$.) Cada día, la expectativa aumenta.

Por lo tanto, cada día hacemos lo razonable y esperamos al día siguiente. El resultado es que nunca arroja-

mos la moneda, ¡así que nos quedamos para siempre en el infierno! Arrojarla cualquier día debe ser mejor que eso. Así que, al parecer, la única cosa racional por hacer ¡es ser irracional!

Principales ideas del capítulo

- $E(a) = pr(o_1) \times V(o_1) + \ldots + pr(o_n) \times V(o_n)$, donde $o_1, \ldots o_n$ establece todas las consecuencias posibles que podrían resultar si *a* fuera verdadera.
- La acción racional es la que hace verdadera la declaración con la mayor expectativa.

14. UN POCO DE HISTORIA Y ALGUNAS LECTURAS ADICIONALES

Las ideas que hemos visto en este libro se desarrollaron en varios momentos y lugares diferentes. En este capítulo describiré la historia de la lógica, y localizaré las ideas en su contexto histórico. Primero delinearé brevemente la historia de la lógica en general; luego, capítulo por capítulo, explicaré cómo encajan los detalles dentro del conjunto mayor.

Conforme avancemos, también recomendaré alguna lectura adicional, donde puedan continuar algunos de los temas que deseen. Esto no es tan simple como podría pensarse. Por mucho, los lógicos, filósofos y matemáticos prefieren escribir unos para otros. Resulta así que estos escritos no son sencillos para los principiantes, pero he hecho lo mejor que pude.

En la historia intelectual de Occidente, ha habido tres grandes periodos de desarrollo dentro de la lógica, con algunos periodos estériles entre ellos. El primer gran periodo fue el de la antigua Grecia, entre los años 400 y 200 a. C. La figura más importante aquí es Aristóteles (384-322), a quien conocimos en el capítulo 6. Aristóteles desarrolló una teoría sistemática de inferencias llamada "silogismos", que tienen la forma:

Todos [algunos] *A*s son [no son] *B*s.
Todos [algunos] *Bs* son [no son] *C*s.
Entonces, todos [algunos] *A*s son [no son] *C*s.

Aristóteles vivió en Atenas la mayor parte de su vida, fundó una escuela de filosofía llamada el Liceo, y por lo general se le reconoce como el fundador de la lógica. Pero cerca de la misma época, hubo otra escuela floreciente de lógica en Megara, como a 50 km al oeste de Atenas. Se sabe poco de los lógicos de Megara, pero parecen haber estado particularmente interesados en los condicionales, y también en las paradojas lógicas. Eubúlides (a quien conocimos en los capítulos 5 y 10) fue de Megara. Otro movimiento filosófico importante comenzó en Atenas alrededor del año 300 a. C. Fue llamado estoicismo, por el porche (en griego "stoa") donde se llevaban a cabo sus primeras reuniones. Los intereses filosóficos del estoicismo eran mucho más amplios que la lógica, pero ésta era uno de los más importantes. Generalmente se ha supuesto que la lógica de Megara tuvo influencia en los lógicos estoicos. En cualquier proporción, uno de los principales intereses de los lógicos estoicos fue la investigación del comportamiento de la negación, la conjunción, la disyunción y el condicional.

También debe mencionarse que alrededor de la misma época, mientras todo esto sucedía en Grecia, en la India, principalmente los lógicos budistas, desarrollaban teorías lógicas. Aunque estas teorías fueron importantes nunca alcanzaron los sofisticados niveles a los que llegó la lógica en Occidente.

El segundo periodo de crecimiento de la lógica occidental se dio en las universidades europeas medievales, como la de París y la de Oxford, entre los siglos XII y XIV. La lógica medieval incluye a personajes tan notables como Duns Escoto (1266-1308) y William of Ockham (1285-1349), quienes sistematizaron y desarrollaron con mucho la lógica que heredaron de la antigua Grecia. Después de este periodo, la lógica se estancó hasta la segunda mitad del siglo XIX, el único punto brillante en el horizonte durante este lapso fue Leibniz (1646-1716), a quién conocimos en los capítulos 6 y 9. Leibniz anticipó algunos de los modernos desarrollos de la lógica, pero las matemáticas de su tiempo no permitieron que sus ideas despegaran.

El desarrollo del álgebra abstracta en el siglo XIX proporcionó lo necesario, y disparó el inicio del último, y quizá mayor, de los tres periodos. Ideas lógicas radicalmente nuevas fueron desarrolladas por pensadores como Frege (1848-1925) y Russell (1872-1970), a quienes conocimos en los capítulos 2 y 4, respectivamente. Las teorías lógicas que se desarrollaron a partir de esta obra se consideran, normalmente, como *lógica moderna*, en oposición a la *lógica tradicional* que la precedió. Los desarrollos en la lógica continuaron con rapidez durante el siglo XX, y aún no dan signos de desacelerarse.

Una historia estándar de la lógica es la de Kneale y Kneale (1975). Hoy está algo desactualizada, y se caracteriza por más optimismo del justificado, por su actitud de que los primeros lógicos modernos finalmente hicieron todo bien; pero sigue siendo una obra de referencia.

Capítulo 1. La diferencia entre la validez inductiva y la deductiva se remonta hasta Aristóteles. Las teorías de la validez deductiva han sido articuladas desde esa época.

La visión descrita en el capítulo 1 —una inferencia es deductivamente válida sólo si la conclusión es verdadera en cualquier situación donde sus premisas son verdaderas— puede rastrearse, discutiblemente, hasta la lógica medieval; pero su articulación es una parte central de la lógica moderna. Una advertencia: lo que he llamado *situación* es más comúnmente llamado *interpretación, estructura*, o a veces, *modelo*. La palabra "situación" por sí misma tiene un sentido diferente y técnico en un área de la lógica. Lewis Carroll (cuyo nombre verdadero era Charles Dodgson) no era un lógico, pero publicó varias obras de lógica tradicional.

Capítulo 2. El argumento para el efecto de que las contradicciones implican todo es una invención medieval. No está claro exactamente quién fue su autor, pero ciertamente puede encontrarse en Escoto. La comprensión de la verdad funcional de la negación, conjunción y disyunción parece haber surgido en la Edad Media. (La visión estoica no era una verdad funcional en un sentido moderno.) Su forma completamente articulada aparece en los fundadores de la lógica moderna, Frege y Russell. Un disidente moderno es Strawson (1952).

Capítulo 3. La diferencia entre nombres y cuantificadores es, sobre todo, una criatura de la lógica moderna. De hecho, el análisis de los cuantificadores con frecuencia se considera como un momento definitorio de la lógica moderna. Es una aportación de Frege que más tarde adopta Russell. Alrededor de la misma época, el filósofo y lógico estadunidense, C. S. Peirce, desarrolló ideas similares. $\exists x$ con frecuencia se llama cuantificador *existencial*; pero esta terminología pasa de contrabando en una teoría algo polémica de la existencia. Las obras de Lewis Carroll sobre *Alicia* están llenas de bromas filosóficas. Para conocer un comentario excelente sobre ellas, véase Heath (1974). Con respecto a muchas de las propias bromas de Heath sobre la nada, véase Heath (1967).

Las teorías explicadas en los capítulos 1 a 3 pueden encontrarse en cualquier texto estándar moderno de lógica. Hodges (1977) es uno que no tiene un nivel tan formidable; tampoco Lemmon (1971).

Capítulo 4. La separación de descripciones como una categoría lógica importante también es algo que sólo se encuentra en la lógica moderna. Quizá el análisis más famoso de ellas lo hizo Russell en 1905. La exposición dada en este capítulo no es de Russell, pero es muy cercana en espíritu. Las descripciones se discuten en algunos textos estándar de lógica moderna. Hodges (1977) es un buen ejemplo de ello.

Capítulo 5. Varias versiones diferentes de la paradoja del mentiroso pueden encontrarse en la filosofía griega antigua. Se inventaron y discutieron más paradojas de autoreferencia en toda la lógica medieval. Incluso se descubrieron más hacia el cambio del siglo XX —y en esta ocasión en el mismo centro de las matemáticas. Desde entonces, se han convertido en tema central en la lógica. Las aproximaciones para resolverlas son muy numerosas. La idea de que puede haber algunas proposiciones que no son ni verdaderas ni falsas se remonta hasta Aristóteles (*De Interpretatione*); sin embargo, él no hubiera simpatizado con la idea simétrica de que algunas proposiciones podrían ser tanto verdaderas como falsas. Sostener que puede haber tales oraciones, y que las oraciones paradójicas pueden estar entre ellas, es una visión no ortodoxa en la que han avanzado algunos lógicos durante los

últimos cuarenta años. Las discusiones de las paradojas de autorreferencia tienden muy rápido a volverse técnicas. Pueden encontrarse buenas discusiones introductorias en Read (1994, capítulo 6) y en Sainsbury (1995, capítulos 5, 6). La idea completa aún es objeto de muchos debates.

Capítulo 6. El estudio de las inferencias que involucra a los operadores modales retrocede hasta Aristóteles y continúa en la Edad Media. El filósofo estadunidense C. I. Lewis, alrededor de 1915 y 1930, empezó las modernas investigaciones. La noción de un mundo posible se encuentra en Leibniz, pero la forma en que se aplica en este capítulo se debe principalmente a otro filósofo estadunidense, Saul Kripke, quién creó las ideas en la década de 1960. Una introducción estándar en esa área es la de Hughes y Cresswell (1996); pero es improbable que obtengamos mucho de ella antes de leer un libro introductorio de lógica de un tipo más estándar. El argumento de Aristóteles para el fatalismo procede de *De Interpretatione*, capítulo 9. Lo consideró falaz, pero no por las razones expuestas en este capítulo. Una discusión razonablemente accesible al respecto puede encontrarse en Haack (1974, capítulo 3). El argumento con el que concluye el capítulo es una versión del Argumento Maestro declarado por el lógico de Megara, Diódoro Cronos.

Capítulo 7. El debate sobre la naturaleza de los condicionales data de los megarianos y los estoicos, quienes produjeron varias teorías diferentes. El tema también fue muy discutido en la Edad Media. La idea de que el condicional es una verdad funcional es un punto de vista megariano. Fue aprobado en la moderna lógica temprana por Frege y Russell. Su forma en este capítulo puede encontrarse desde luego en la lógica medieval; en su versión

moderna, se debe a C. I. Lewis, quién desarrolló la lógica moderna alrededor de ésta. La noción de la implicación conversacional se debe al filósofo británico Paul Grice en la década de 1970 (aunque la usó en defensa del condicional material). La naturaleza de los condicionales es aún objeto de debates. Read (1994, capítulo 3) ofrece una introducción comprensible, igual que la Parte 1 de Sanford (1989).

Capítulo 8. El razonamiento temporal se discute en varios lógicos medievales. El acercamiento descrito en este capítulo fue concebido principalmente por el lógico neozelandés Arthur Prior en la década de 1960, inspirado por desarrollos de la lógica modal. Øhrstrøm y Hasle (1995) dan cuenta del tema de manera comprensible. El argumento de McTaggart apareció originalmente en 1908, aunque su presentación es de alguna manera diferente a la mía. Mi presentación sigue a la de Mellor (1981, capítulo 7).

Capítulo 9. La diferencia entre el *es de identidad* y el *es de predicado* data de Platón (maestro de Aristóteles) en la filosofía de la antigua Grecia. El origen del planteamiento de la identidad que he dado aquí es incierto. El pensamiento de que es posible sustituir iguales por iguales se encuentra en Euclides (*c.* 300 a. de C). Algo como lo propuesto aquí puede encontrarse en Ockham, y desde luego en Leibniz. En su forma moderna, se encuentra en Frege y Russell. Existen presentaciones de ello en textos de lógica moderna más estándar, como los de Hodges (1977) y Lemmon (1971). En la filosofía hay legiones de acertijos sobre la identidad. El que cierra el capítulo se debe, hasta donde sé, a Prior.

Capítulo 10. Los problemas de *sorites* datan de la lógica megariana. El problema con el que inicia el capítulo es una versión de uno llamado el *Barco de Teseo*, un barco que supuestamente fue reconstruido tabla por tabla. Hasta donde sé, utilizó por primera vez este ejemplo el filósofo inglés del siglo XVII Thomas Hobbes, en la sección *De Corpore* de su obra *Elements of Philosophy*. Una intensa investigación sobre problemas de este tipo es característica de los últimos 30 años. Los detalles lógicos descritos en este capítulo fueron desarrollados inicialmente por el lógico polaco Jan Łukasiewicz (se pronuncia *Woo/ka/zye/vitz*) en la década de 1920, muy independiente de las preocupaciones sobre la vaguedad. (Él fue motivado principalmente por el argumento de Aristóteles sobre el fatalismo). Pueden encontrarse buenas discusiones sobre la vaguedad en Read (1994, capítulo 7) y Sainsbury (1995, capítulo 2). Una introducción mucho más larga es la de Williamson (1994).

Capítulo 11. Históricamente, la validez inductiva está muy poco desarrollada, comparada con la validez deductiva. La teoría de la probabilidad se desarrolló en el siglo XVIII, en conexión con los juegos de probabilidad, en gran parte por matemáticos de habla francesa, como Pierre de LaPlace y miembros de la prodigiosa familia Bernoulli. La idea de aplicarlos a la inferencia inductiva se debe principalmente al lógico alemán Rudolph Carnap en la década de 1950. Hay muchas nociones de probabilidad. La que se describe en este capítulo es usualmente llamada *interpretación de frecuencia*. Una buena introducción a toda el área es la de Skyrms (1975).

Capítulo 12. Las investigaciones sobre la conexión entre las probabilidades inversas proceden del matemático británico del siglo XVIII, Thomas Bayes. La conexión descrita en este capítulo se llama con frecuencia (incorrectamente) Teorema de Bayes. Los problemas que conciernen al Principio de Indiferencia también datan de los orígenes de la teoría de la probabilidad. Una introducción estándar al razonamiento de este tipo es la de Howson y Urbach (1989); pero éste no es un libro para quienes temen a las matemáticas.

Capítulo 13. La teoría de la decisión también tiene sus raíces en las investigaciones sobre la teoría de la probabilidad del siglo XVIII, pero se volvió un asunto serio en el siglo XX, con muchas aplicaciones importantes encontradas en la economía y en la teoría de juego. Una buena introducción es la de Jeffrey (1985), aunque, de nuevo, este libro no es para quienes temen a las matemáticas. El problema con el que termina el capítulo proviene de Gracely (1988).

Muchos de los argumentos que hemos encontrado en este libro involucran a Dios, de una manera u otra. Esto no se debe a que Dios sea un tópico lógico en particular. Es sólo que los filósofos han tenido mucho tiempo para llegar con argumentos interesantes relacionados con Dios. En el capítulo 3, encontramos al Argumento Cosmológico. Quizá la versión más famosa de esto fue propuesta por el filósofo medieval Tomás de Aquino. (Su versión es mucho más sofisticada que el argumento del capítulo 3, y no sufra por el problema apuntado ahí.) El Argumento Ontológico para la existencia de Dios fue propuesto por el filósofo medieval Anselmo de Canterbury. La versión dada en el capítulo 4 se debe esencialmente al filósofo del siglo XVII René Descartes en

su *Quinta Meditación.* Las versiones biológicas del Argumento para el Diseño, muy populares en el siglo XIX, fueron destruidas por la Teoría de la Evolución. Las versiones cosmológicas, del tipo que se presenta en el capítulo 12, se hicieron muy populares en el siglo XX. Una pequeña obra de referencia buena sobre argumentos de la existencia de Dios es la de Hick (1964).

Hay, por supuesto, mucho más sobre la historia de la lógica de lo que dicen los detalles anteriores. De igual manera, hay mucho de la misma lógica que está por completo ausente en este libro. Hemos estado patinando sobre la superficie de la lógica. Tiene grandes profundidades y bellezas que uno no puede ni siquiera empezar a transmitir en un libro de este tipo. Pero muchos de los grandes lógicos del pasado se comprometieron con la materia justo gracias al tipo de consideraciones y problemas que discute este libro. Si también los han animado a ustedes, no puedo pedir más.

GLOSARIO

El siguiente glosario contiene los términos y símbolos de la lógica que se emplean en este libro. Los apuntes no tienen la intención de ser definiciones precisas, sino la intención de transmitir la idea principal para una referencia rápida. Los términos y símbolos son razonablemente estándar, aunque hay muchos otros juegos de símbolos también de uso común.

antecedente: lo que resulta del "si" en un condicional.
autoreferencia: una oración acerca de una situación que se refleja de nuevo en sí misma.
clase de referencia: el grupo de objetos desde los cuales los radios de probabilidades se computan.
conclusión: la parte de una inferencia en la que se dan las razones.
condicional: si… entonces…
condicional material: no ambos (… y no…)
condiciones de verdad: oraciones que explican cómo los valores de verdad de una oración dependen de los valores de verdad de sus componentes.
conjunción: … y …
conjuntos: las dos oraciones involucradas en una conjunción.

consecuente: lo que resulta de "entonces" en un condicional.
cuantificador: una palabra o frase que puede ser sujeto de una oración, pero que no se refiere a ningún objeto.
cuantificador particular: algo es tal que…
cuantificador universal: todo es tal que…
descripción (definida): un nombre de la forma "la cosa con tal y tal propiedades".
disyunción: o… o…
disyuntivas: las dos oraciones involucradas en una disyunción.
"es" de identidad:… es el mismo objeto que…
"es" de predicado: una parte del predicado que indica la aplicación de la propiedad expresada por el resto de él.
expectativa: el resultado de tomar cada posible resultado, multiplicando su valor por su probabilidad, y sumando todos los resultados.
función de verdad: un símbolo lógico que cuando se aplica a oraciones para dar una oración más compleja es tal que el valor de verdad del compuesto está completamente determinado por el (los) valor(es) de verdad de su(s) componente(s).
implicación conversacional: una inferencia, no de lo que se dice, sino del hecho que sea dicho.
inferencia: un tipo de razonamiento en el que las premisas son dadas como razones para una conclusión.
Ley de Leibniz: si dos objetos son idénticos, cualquier propiedad de uno es propiedad del otro.
lógica borrosa: un tipo de lógica en que las oraciones toman valores de verdad que pueden ser cualquier número entre el 0 y el 1.

lógica moderna: las teorías y técnicas lógicas que surgieron de la revolución de la lógica a inicios del siglo XX.
lógica tradicional: teorías y técnicas lógicas empleadas antes del siglo XX.
modus ponens: la forma de inferencia *a*, *a*→ *c*/*c*.
mundo posible: una situación asociada con otra, *s*, donde las cosas, de hecho, son como simplemente podrían ser en *s*.
necesidad: debe ser el caso que…
negación: no es el caso que…
nombre: categoría gramatical para una palabra que se refiere a un objeto.
nombre propio: un nombre que no es una descripción.
operador temporal: una frase sumada a una oración, para formar otra oración que exprese cuándo es verdadera o falsa la primer oración (pasado o futuro).
operador modal: una frase sumada a una oración para formar otra oración que exprese la manera en la que la primera oración es verdadera o falsa (posiblemente, necesariamente, etcétera).
Paradoja de Russell: concierne al conjunto de todos los que no son miembros de sí mismos.
Paradoja del Mentiroso: "Esta oración es falsa".
paradoja sorites: un tipo de paradoja que involucra aplicaciones reiteradas de un predicado incierto.
posibilidad: podría ser el caso que…
predicado: para el tipo de oración gramaticalmente más simple, parte que expresa lo que sea que se dice sobre lo que trata la oración.
premisas: la parte de una inferencia que da razones.

Principio de Indiferencia: dado un número de posibilidades, sin diferencia relevante entre ellas, todas tienen la misma probabilidad.

probabilidad: un número entre 0 y 1, que mide que tan probable es algo.

probabilidad condicional: la probabilidad de alguna proposición, dada alguna otra información.

probabilidad inversa: la relación entre la probabilidad condicional de *a* dado *b*, y de *b* dado *a*.

probabilidad previa: la probabilidad de alguna proposición antes de que cualquier evidencia se tome en cuenta.

silogismo: una forma de inferencia con dos premisas y una conclusión, cuya teoría fue creada por Aristóteles.

situación: un estado de asuntos, quizá hipotéticos, en los que las premisas y conclusiones pueden ser verdaderas o falsas.

sujeto: para el tipo de oración gramaticalmente más simple, la parte que nos dice de qué trata la oración.

tabla de verdad: un diagrama que representa las condiciones de verdad.

teoría de la decisión: la teoría de cómo tomar decisiones bajo condiciones de información incierta.

tiempo: pasado, presente o futuro.

vaguedad: una propiedad de un predicado que expresa la idea de que los pequeños cambios en un objeto no hacen ninguna diferencia para la aplicación del predicado.

validez: se aplica a una inferencia en la que las premisas realmente proporcionan una razón de algún tipo para la conclusión.

validez deductiva: una inferencia es deductivamente válida cuando las premisas no pueden ser verdaderas sin que la conclusión también lo sea.

validez inductiva: una inferencia es inductivamente válida cuando las premisas proporcionan alguna base razonable, aunque no necesariamente conclusiva para la conclusión.

valor de verdad: verdadero (*V*) o falso (*F*).

Símbolo	Significado	Nombre
V	verdadero (en una situación)	valores de verdad
F	falso (en una situación)	
$\vee$	o… o…	disyunción
$\wedge$	… y…	conjunción
$\sim$	no es el caso que…	negación
$\exists x$	algún objeto, *x*, es tal que…	cuantificador particular
$\forall x$	todo objeto, *x*, es tal que…	cuantificador universal
ιx	el objeto, *x*, es tal que…	operador descriptivo
$\Box$	debe ser el caso que…	operador modal
$\Diamond$	podría ser el caso que…	
$\rightarrow$	si… entonces…	condicional
$\supset$	no ambos (… y no…)	condicional material
P	fue el caso que…	operadores temporales
F	será el caso que…	
H	siempre ha sido el caso que…	
G	siempre será el caso que…	
$=$	…es el mismo objeto que…	identidad
$<$	…es menos que…	
$\leq$…	…es menos o igual que…	
$\mid \ldots \mid$	el número que es el valor de verdad de…	
Max	el mayor de… y…	
Min	el menor de… y…	
pr	la probabilidad de…	
pr(…|…)	la probabilidad de… dado que…	probabilidad condicional
E	la expectativa de que sea el caso que…	
V	el valor de que sea el caso que…	
$\approx$	…es aproximadamente igual a…	

Problemas

Para cada uno de los principales capítulos del libro, el siguiente apartado propone un ejercicio donde pueden probar su comprensión del contenido de ese capítulo. Las soluciones de los problemas se encuentran en las páginas 169:

Capítulo 1. ¿La siguiente inferencia es deductivamente válida, inductivamente válida, o ninguna de las dos? ¿Por qué? *José es español; la mayoría de los españoles son católicos; así que José es católico.*

Capítulo 2. Simboliza la siguiente inferencia, y evalúa su validez. *O Jones es un bribón o es un tonto; pero desde luego es un bribón; así que no es un tonto.*

Capítulo 3. Simboliza la siguiente inferencia, y evalúa su validez. *Alguien o vio el tiroteo o lo escuchó; así que o alguien vio el tiroteo o alguien lo escuchó.*

Capítulo 4. Simboliza la siguiente inferencia, y evalúa su validez. *Todos querían ganar el premio; así que la persona que ganó la carrera quería ganar el premio.*

Capítulo 5. Simboliza la siguiente inferencia, y evalúa su validez. *Hiciste una omelette, y no haces una omelette sin romper un huevo; así que rompiste un huevo.*

Capítulo 6. Simboliza la siguiente inferencia, y evalúa su validez. *Para los cerdos es imposible volar, y para los cerdos es imposible respirar bajo el agua; así que debe ser el*

caso que los cerdos ni pueden volar ni pueden respirar bajo el agua.

Capítulo 7. Simboliza la siguiente inferencia, y evalúa su validez. *Si crees en Dios, entonces vas a la iglesia; tú vas a la iglesia, así que crees en Dios.*

Capítulo 8. Simboliza la siguiente inferencia, y evalúa su validez. *Siempre ha llovido, y siempre lloverá; así que ahora está lloviendo.*

Capítulo 9. Simboliza la siguiente inferencia, y evalúa su validez. *Pat es una mujer, y la persona que limpió las ventanas no es una mujer; así que Pat no es la persona que limpió las ventanas.*

Capítulo 10. Simboliza la siguiente inferencia y evalúa su validez, donde el nivel de aceptación es 0.5. *Jenny es inteligente; y o Jenny no es inteligente o es bonita; así que Jenny es bonita.*

Capítulo 11. El siguiente conjunto de estadísticas se realizó a partir de 10 personas (llamado 1-10).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Altos	✓		✓		✓				✓	
Ricos	✓		✓		✓		✓	✓		
Felices	✓	✓		✓	✓			✓	✓	

Si *r* es una persona elegida al azar en esta colección, determina la validez inductiva de la siguiente inferencia. *r es alto y rico, así que r es feliz.*

Capítulo 12. Supongan que hay dos enfermedades, *A* y *B*, que tienen exactamente los mismos síntomas visibles. 90% de las personas que presentan los síntomas tienen la enfermedad *A*; el otro 10% tienen la enfermedad B. Supongamos, también, que hay una prueba de patología para distinguir entre *A* y *B*. La prueba da la respuesta correcta 9 veces de 10.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que esa prueba, cuando se aplica a una persona al azar que presenta los síntomas, diga que tiene la enfermedad *B*? (Tip: consideren una muestra típica de 100 personas con los síntomas, y resuelvan cuantas pruebas dirán que tienen la enfermedad *B*.)
2. ¿Cuál es la probabilidad de que alguien con los síntomas tenga la enfermedad *B*, dado que las pruebas digan que la tiene? (Tip: necesitan usar la primera pregunta.)

Capítulo 13. Rentan un carro. Si no contratan el seguro, y tienen un accidente, les costará $1,500. Si contratan el seguro, y tienen un accidente, les costará $300. El seguro cuesta $90, y ustedes estiman que la probabilidad de sufrir un accidente es de 0.05. Suponiendo que las únicas consideraciones son las financieras, ¿deberían contratar el seguro?

Referencias de las ilustraciones

11. Sherlock Holmes
[p. 111]
© Mary Evans Picture Library

12. Galaxia de remolino
[p. 120]
Science Photo Library. Fotografía: Chris Butler

13. Un plan diabólico
[p. 137]
© John Taylor

Bibliografía

E. J. Gracely, *"Playing Games with Eternity: the Devil"s Offer"*, *Analysis* 48, 1988, p. 113.

S. Haack, *Deviant Logic,* Cambridge University Press, Cambridge, 1974.

Peter Heath, *"Nothing"*, P. Edwards, ed., vol. 5, *Encyclopedia of Philosophy,* Macmillan, London, 1967.

Peter Heath, *The Philosopher's Alice,* St. Martin Press, New York, 1974.

John Hick, *Arguments for the Existence of God,* Collier-Macmillan, Ltd., London, 1964.

Wilfrid Hodges, *Logic,* Penguin Books, London, 1977.

Colins Howson y Peter Urbach, *Scientific Reasoning: the Bayesean Approach,* Open Court, La Salle, II, 1989.

G. E. Hughes y M. Cresswell, *A New Introduction to Modal Logic,* Routledge, London, 1996.

Richard C. Jeffrey, *The Logic of Decision,* University of Chicago Press, Chicago, 2da. edición, 1983.

E. J. Lemmon, *Beginning Logic,* Thomas Nelson and Sons Ltd., London, 1971.

William Kneale y Martha Kneale, *The Development of Logic,* Clarendon Press, Oxford, 1975.

D. H. Mellor, *Real Time,* Cambridge University Press, Cambridge, 1981, 2da. edición, Routledge, London, 1998).

P. Y. Østrøm y P. F. V. Halse, *Temporal Logic: From Ancient Ideas to Artificial Intelligence,* Kluwer Academic Publishers, Dodrecht, 1995.
S. Read, *Thinking about Logic: an Introduction to the Philosophy of Logic,* Oxford University Press, Oxford, 1994.
R. M. Sainsbury, *Paradoxes,* Cambridge University Press, Cambridge, 2da. edición, 1995.
David H. Sanford, *If P then Q: Conditionals and the Foundations of Reasoning,* Routledge, London, 1989.
Brian Skyrms, *Choice and Chance,* Dickenson Publishing Co., Encino, CA, 1975.
Peter Strawson, *Introduction to Logical Theory,* Methuen & Co., London, 1952.
Timothy Williamson, *Vagueness,* Routledge, London, 1994.

Índice temático

Las referencias envían a las páginas, a menos que se indique capítulo, caso en el que envían a capítulos. Cuando existe más de una referencia se señala la principal en negritas.

Índice de nombres

Solución a los problemas

Las que siguen son las soluciones a los problemas de las páginas 155-158. En muchos casos, en especial donde una inferencia es inválida, las soluciones no son únicas: otras soluciones, igual de válidas, son por completo posibles.

Capítulo 1

La inferencia no es válida deductivamente. Es muy posible que las premisas sean verdaderas, y que José entonces sea de la minoría de españoles que no son católicos. Con todo, las premisas en conjunto dan buena (aunque no decisiva) razón para suponer que la conclusión sea verdadera. Por lo tanto, la inferencia es inductivamente válida.

Capítulo 2

Digamos que:

k sea "Jones es un bribón".
f sea "Jones es un tonto".

Entonces la inferencia es:

$$\frac{k \vee f,\ k}{\sim f}$$

Evaluemos su validez:

k	f	$k \vee f$	k	$\sim f$
V	V	V	V	F
V	F	V	V	V
F	V	V	F	F
F	F	F	F	V

En la primera hilera, ambas premisas son V, y la conclusión es F. Por lo tanto, la inferencia es inválida.

Capítulo 3

Digamos que:

xS sea "x vio el tiroteo".
xH sea "x escuchó el tiroteo".

Y dejemos que los objetos en cuestión sean la gente. Entonces la inferencia es:

$$\frac{\exists x\ (xS \vee xH)}{\exists x\ xS \vee \exists x\ xH}$$

La inferencia es válida. Es de suponer que la premisa es verdadera en alguna situación. Entonces hay algún

objeto, x, en el ámbito de esa situación dada que $xS \vee xH$. Dadas las condiciones de verdad para $\vee$, o xS o xH. En el primer caso, $\exists x\ xS$; en el segundo, $\exists x\ xH$. En ningún caso, $\exists x\ xS \vee \exists x\ xH$ es verdadero en la situación.

Capítulo 4

Digamos que:

xP sea "x querían ganar el premio".
xR sea "x ganó la carrera".

Y dejemos que los objetos en cuestión sean la gente. Entonces la inferencia es:

$$\frac{\forall x\ xP}{(\iota x\ xR)P}$$

La inferencia es inválida. Tomemos una situación, s, en la que todos quedan satisfechos P, pero en la que nadie se satisface R. (¡A lo mejor la carrera se canceló!) Entonces la premisa que es verdadera es s. Pero la descripción $\iota x\ xR$ no se refiere a nada. Por lo tanto, la conclusión es falsa en s.

Capítulo 5

Digamos que:

m sea "Hiciste una omelette".
b sea "Rompiste un huevo".

Entonces la inferencia es:

$$\frac{m, \sim(m \wedge \sim b)}{b}$$

Esta inferencia es inválida. Tomemos la siguiente situación:

b : F pero no V
m : V y F

Entonces $\sim b$ es V (y no F); así que $m \wedge \sim b$ es V y F (ambos conjuntos son verdaderos, y uno es falso); así $\sim(m \wedge \sim b)$ es V y F. En esta situación ambas premisas son V y la conclusión no.

Capítulo 6

Digamos que :

f sea "los cerdos vuelan".
b sea "los cerdos respiran bajo el agua".

Entonces la inferencia es:

$$\frac{\sim\Diamond f \wedge \sim\Diamond b}{\Box(\sim f \wedge \sim b)}$$

La inferencia es válida. Es de suponer que la premisa es verdadera en alguna situación, s. Luego ambos con-

juntos son verdaderos en esa situación. Por lo tanto, no hay una situación asociada, s', donde o f es verdadero (primer conjunto) o b es verdadero (segundo conjunto). Esto es, en toda situación asociada, s', $\sim f \wedge \sim b$ es verdadera. Por lo tanto, la conclusión es verdadera en s.

Capítulo 7

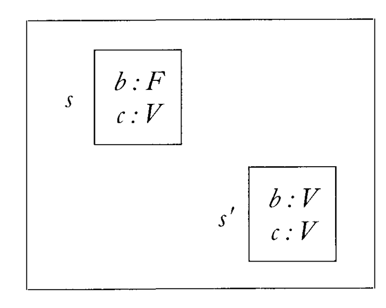
Digamos que:

b sea "Crees en Dios".
c sea "Vas a la iglesia".

Entonces la inferencia es:

$$\frac{b \rightarrow c, c}{b}$$

La inferencia es inválida. Es de considerar una situación, s, con una situación asociada, s', donde las cosas son como se representan en el diagrama siguiente:



En toda situación donde b es verdadera, lo es c. Por lo tanto, $b \rightarrow c$ es verdadera en s. Así que ambas premisas son verdaderas en s, pero la conclusión no.

Capítulo 8

Digamos que:

> r sea “está lloviendo”.

Entonces la inferencia es:

$$\frac{\mathbf{H}r \wedge \mathbf{G}r}{r}$$

Esta inferencia es inválida. Es de suponer que las cosas son como se representan en el siguiente grupo de situaciones:

$\ldots s_{-3}$	s_{-2}	s_{-1}	s_0	s_1	s_2	$s_3 \ldots$
r	r	r	$\sim r$	r	r	r

r es verdadera en todos los momentos anteriores a s_0; así que $\mathbf{H}_r$ es verdadera en s_0. r es verdadera en todos los momentos posteriores a s_0; así que $\mathbf{G}r$ es verdadera en s_0. Por lo tanto, $\mathbf{H}r \wedge \mathbf{G}r$ es verdadera en s_0, pero la conclusión no.

Capítulo 9

Digamos que:

> f sea “Pat”.
> c sea “la persona que limpió las ventanas”.
> w sea “es una mujer”.

Entonces la inferencia es:

$$\frac{pW \wedge \sim cW}{\sim p = c}$$

La inferencia es válida. Tomemos cualquier situación donde la premisa sea verdadera. Luego en esa situación, cualquiera sea el nombre que p remite para tener la propiedad que expresa W, y cualquiera sea el nombre que c remite para no tenerla. Por lo tanto, según la Ley de Leibniz, p y c significan diferentes cosas (¡aceptando que nada puede ser verdadero y falso a la vez!). Esto es, $\sim p = c$ es verdadera.

Capítulo 10

Digamos que:

> c sea “Jenny es inteligente”.
> b sea “Jenny es bonita”.

Entonces la inferencia es:

$$\frac{c, \sim c \lor b}{b}$$

La inferencia es inválida. Tomemos una situación donde los valores de verdad de c y b son como sigue:

$c : 0.5$
$b : 0.2$

Luego el valor de verdad de $\sim c$ en esta situación es 0.5 (1 −0.5), y así el valor de verdad de $\sim c \lor b$ es también 0.5 (*Máx*(0.5, 0.2)). Pero entonces ambas premisas son aceptables (≥0.5), y la conclusión no.

Capítulo 11

Digamos que:

> t sea "r es alto".
> w sea "r es rico".
> h sea "r es feliz".

La inferencia es válida. Pongamos que hay tres personas que son altas y ricas, y dos de ellas son felices. Por lo tanto, $pr(h \mid t \land w) = 2/3$. Una de ellas es infeliz, así que $pr(\sim h \mid t \land w) = 1/3$. Por lo tanto, $pr(h \mid t \land w) > pr(\sim h \mid t \land w)$.

Capítulo 12

Para la parte 1: consideremos una muestra típica de 100 personas con los síntomas. 90 tendrán la enfermedad *A* y 10 tendrán la enfermedad *B*. Ya que la prueba da la respuesta correcta 9 veces de 10, dirá que 81 de los 90 tienen *A* (90 × 9/10), y 9 de ellos tienen *B*. De los 10 con enfermedad *B*, dirá que 9 tienen enfermedad *B* y 1 tiene enfermedad *A*. Por lo tanto, un total de 18 puede decirse que tiene *B*, y así la probabilidad de que una (escogida al azar) persona resulte que tenga *B* es de 18/100.

Para la parte 2: digamos que r sea una persona escogida al azar con los síntomas, y digamos que:

> b sea "r tiene la enfermedad B".
> t sea "la prueba dice que r tiene la enfermedad B".

Luego:

> $pr\ (t \mid b) = 9/10$, ya que la prueba es 90% segura;
> $pr\ (b) = 1/10$, ya que una persona de cada 10 tiene enfermedad B; y
> $pr\ (t) = 18/100$, por la parte 1.

Por la relación entre las probabilidades inversas, $pr(b \mid t) = pr(t \mid b) \times pr(b)/pr(t) = 9/10 \times 1/10 \div 18/100 = 1/2$.

Capítulo 13

Tabulemos la información como sigue:

	Tener un accidente	No tener un accidente
Contratar un seguro (t)	0.05\−390	0.95\−90
No contratar un seguro ($\sim t$)	0.05\−1,500	0.95\0

Al calcular las expectativas, tenemos:

$E(t) = 0.05 \times (-390) + 0.95 \times (-90) = -105$
$E(\sim t) = 0.05 \times (-1{,}500) + 0.95 \times 0 = -75$

Puesto que $E(\sim t) > E(t)$, no debiéramos contratar un seguro.